Actualidades Investigativas en Educación
Revista Electrónica publicada por el
Instituto de Investigación en Educación
Universidad de Costa Rica
ISSN 1409-4703
http://revista.inie.ucr.ac.cr
COSTA RICA

COMPRENSIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: NIVELES DE COMPRENSIÓN, INDICADORES Y TAREAS PARA SU ANÁLISIS

COMPREHENSION OF TRIGONOMETRIC REASONS:
COMPREHENSION LEVELS, INDICATORS AND TASKS FOR ITS ANALYSIS

Volumen 7, Número 2
Mayo-Agosto 2007
pp. 1-31

Este número se publicó el 30 de agosto 2007

Andrea María Araya Chacón
Adriana Monge Sánchez
Carolina Morales Quirós

La revista está indexada en los directorios:

LATINDEX, **REDALYC**, **IRESIE**, **CLASE**, **DIALNET**, **DOAJ**, **E-REVIST@S**,

La revista está incluida en los sitios:

REDIE, **RINACE**, **OEI**, **MAESTROTECA**, **HUASCARAN**

COMPRENSIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: NIVELES DE COMPRENSIÓN, INDICADORES Y TAREAS PARA SU ANÁLISIS

COMPREHENSION OF TRIGONOMETRIC REASONS:
COMPREHENSION LEVELS, INDICATORS AND TASKS FOR ITS ANALYSIS

Andrea María Araya Chacón[1]
Adriana Monge Sánchez[2]
Carolina Morales Quirós[3]

Resumen: *Este estudio explorador aborda el tema de la comprensión en el área de la Trigonometría, valiéndose del análisis de tareas aplicadas a tres estudiantes de la carrera de Bachillerato en Enseñanza de la Matemática en la Universidad de Costa Rica. La interpretación de los resultados, se basa en criterios correspondientes a las necesidades educativas actuales en Educación Matemática, que orientan los niveles de comprensión propuestos en el trabajo, a saber, instrumental, relacional y formal.*

Palabras clave*: COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS/ FORMACIÓN DE DOCENTES/ EDUCACIÓN MATEMÁTICA/ COSTA RICA/*

Abstract: *This exploratory study approaches the subject of the comprehension in the area of the Trigonometry, using the analysis of some tasks applied to three students majoring in Mathematics Teaching in the University of Costa Rica. The interpretation of the results is based on the criteria related to the actual needs in Mathematics Education, which guide the comprehension levels proposed in this work, to knowing instrumental, relational and formal.*

Key words*: COMPREHENSION IN MATHEMATICS/ TEACHERS FORMATION/ MATHEMATICS EDUCATION/ COSTA RICA*

[1] *Máster en Educación, formación e inserción de la Université Toulouse Le Mirail, Francia. Licenciada en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. Correo electrónico andreaaraya@racsa.co.cr*

[2] *Licenciada en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. Actualmente es profesora de Pan-American School. Correo electrónico a.monge@costarricense.cr*

[3] *Licenciada en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. Actualmente es profesora del Liceo Laboratorio. Correo electrónico carolinamoralesquiros@yahoo.es*

Artículo recibido*: 28 de junio, 2007*
Aprobado*: 25 de julio, 2007*

1. Introducción

Este estudio[4] explora de qué forma la variable comprensión incide en la resolución de problemas que involucran las razones trigonométricas, en tres estudiantes de la carrera de Bachillerato en Enseñanza de la Matemática en la UCR. Se interpretan aportes teóricos sobre la comprensión, analizados desde una perspectiva que trata de hacer frente a las necesidades educativas actuales. Como consecuencia, se establece para el tema elegido tres niveles de comprensión: instrumental, relacional y formal.

La premisa central que orienta y justifica el trabajo, sugiere una correlación positiva entre la comprensión que tiene el docente de los conceptos que enseña y aquella esperada de sus alumnos. Así, asumimos que las carencias en la formación de los profesores de matemáticas explican o al menos se relacionan, con la falta de comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

En el referente teórico discutimos algunas tendencias actuales de la educación matemática y ciertas formas en que se ha venido estudiando el concepto de comprensión. El marco metodológico detalla cómo se llevó acabo el estudio de campo que busca generar indicadores de comprensión en el tema de Trigonometría.

La primera parte de los resultados expone una síntesis de las entrevistas realizadas a los *expertos*, en donde se determinan las condiciones necesarias dadas por estos profesionales para desarrollar la comprensión en Trigonometría, en particular de las razones trigonométricas. La segunda sección incluye los niveles de comprensión construidos como resultado del análisis del aporte de los expertos y la revisión bibliográfica. Esta sección contiene además, los indicadores y tareas elaboradas para estimar la comprensión del tema.

[4] El presente artículo se deriva de una investigación realizada para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática en la UCR. En dicho trabajo, se analizó el tipo de comprensión de ciertos estudiantes universitarios de tres temas matemáticos: razones trigonométricas, la ley de senos y la ley de cosenos. Por motivos de espacio, nos referimos únicamente a los constructos relacionados con el primer tema. Para ampliar, ver Araya et al, 2004.

Finalmente, analizamos el nivel de comprensión alcanzado por cada uno de los tres estudiantes participantes.

2. Referente teórico

Antes de presentar el referente teórico que determina las líneas directrices del estudio, creemos indispensable compartir las premisas generales sobre la construcción del conocimiento matemático que asumimos. Coincidimos con Godino (1996b) en los siguientes puntos:

- La matemática es una actividad humana que implica la solución de situaciones problemáticas.
- Los objetos matemáticos son entidades institucionales, socialmente compartidas.
- Los sistemas de símbolos matemáticos tienen una función comunicativa, semiótica e instrumental.
- La matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado.

Ciertas de las tendencias recientes en Educación Matemática que comparten también estas hipótesis, están determinando los perfiles de los sistemas educativos actuales. Dichas tendencias las discutimos en la siguiente sección con el fin de delimitar, discriminar, aquellas que mejor responden a las necesidades derivadas de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en nuestro país y en particular las asociadas a la Trigonometría.

2.1. Tendencias de la Educación Matemática

Durante los últimos años y dentro de la comunidad de educadores matemáticos, se ha exteriorizado la necesidad de realizar cambios en la forma en que las matemáticas son estudiadas y aprendidas (Santaló, 1994, p. 192).

> Este nuevo movimiento que aboga por un cambio en la educación matemática tiene rasgos diferentes de los cambios pretendidos y realizados en el pasado. Los rasgos en la sociedad en que estamos inmersos, hace que en determinados ámbitos de la educación matemática se empiece a pensar que la formación matemática de los estudiantes no debería ser una acumulación de hechos y procedimientos; sino que debería centrarse más en ayudar a los estudiantes a construir recursos y "herramientas intelectuales" que les permitan dotar de significado a las situaciones problemáticas, así como resolverlas.

Si bien es cierto, la denuncia y las propuestas anteriores no son nuevas, la dificultad para desarrollar tales "recursos y herramientas intelectuales" continua vigente. Las reformas educativas que mundialmente se realizan buscan promover tales recursos y herramientas. Entre ellas, Hilton (2000) propone una reforma para la enseñanza de las matemáticas basada en tres premisas fundamentales: una preparación básica de los profesores en la disciplina que incluya la comprensión de lo que se estudia para una aplicación inmediata y futura; un cambio en la manera, el estilo y/o los contenidos de los cursos para evitar la fobia matemática; y el aprovechamiento de herramientas tecnológicas actuales para evitar la monotonía de la aritmética y las manipulaciones simbólicas.

Al retomar los aspectos que evocan la necesidad de reformar los estilos de enseñanza creando contextos a los cuales los estudiantes atribuyan sus propios significados, la propuesta de Hilton coincide con la presentada por Goffree (2000) dentro del marco de la Educación Matemática Realista en Holanda. Esta propuesta se basa en la utilización de modelos de pensamiento que permitan a los alumnos investigar la situación a partir de la cual fue creado el objeto matemático. Un planteamiento similar orienta la mayoría de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas que asumen una perspectiva Brousseana (Brousseau 1986).

Internacionalmente también se reconocen los esfuerzos de la *National Council of Teacher in Mathematics* (NCTM[5]), quienes proponen estándares nacionales para los Estados Unidos con el fin de mejorar la calidad de enseñanza de las matemáticas escolares. Dichos parámetros están orientados por seis principios: equidad, curriculum, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología; que se adaptan según el nivel de los estudiantes (Grados K-12, en terminología estadounidense).

En la propuesta de la NCTM es claro el rol que el docente debe asumir para la enseñanza de las matemáticas:

- Permitir que los estudiantes seleccionen y elaboren algunos de los problemas.
- Fomentar en los estudiantes destrezas de "análisis de problemas", brindando más información de la necesario o escasa que no permita resolverlo.
- Promover la expresión oral del análisis de un problema y su estrategia de solución antes de resolverlo.
- Promover, mediante la reflexión, el desarrollo de una estructura matemática más profunda y una buena disposición hacia la generalización.

Para las tres propuestas anteriores, (Hilton, Goffree y NCTM) los autores aclaran que concretizarlas en la práctica demanda que los profesionales en la enseñanza de la matemática, posean *una comprensión profunda* de la disciplina. Justifican esta posición señalando que la falta de dominio del contenido repercute sobre las variables didácticas; lo que traducimos en que la comprensión del contenido, es directamente proporcional a la capacidad de gestión de la clase. Similarmente, Hilton (2000, pp. 80-81) argumenta que,

> Aquellas partes de la matemática que no sean pesadas, ni aburridas, ni mecánicas, no pueden enseñarse correctamente a no ser que el profesorado posea un amplio conocimiento de las matemáticas y comprenda profundamente los temas que se trata. Sin poseer dicho conocimiento y comprensión se pueden enseñar únicamente técnicas

[5] standards.nctm.org

> enseñando meramente cómo hacer y esforzándose mediante la repetición y la imposición de ejercicios estándares, en fijar esas destrezas en el repertorio del estudiante […] Es imposible educar con éxito si el profesor no está adecuadamente formado, si no posee un conocimiento que va más allá del nivel que enseñará o si no posee una comprensión que, como mínimo, se asemeja, aquella de sus mejores alumnos.

En resumen, las necesidades actuales en educación matemática, traducen parte del panorama internacional en ciertas características primordiales que se esperan del profesor: dominio del tema, conocer cómo aprenden los estudiantes, fomentar el razonamiento lógico en los alumnos e integrar la tecnología en el estudio que se planea. Entre estos elementos nos interesamos particularmente en el primero, dominio del tema, por ser uno de los factores que el profesor, en particular debutante, enfrenta con mayor frecuencia. Profundizaremos al respecto en lo que detallamos en la sección siguiente como *comprensión profunda en matemáticas*.

2.2. Comprensión

Son diversos los esfuerzos (Sierpinska, 1994; Godino, 1996a, 2002; Perkins, 1999; Stone, 1999, entre otros) por dar respuesta a ¿qué es comprensión?, ¿qué significa comprensión de un objeto matemático dado?, ¿es posible distinguir grados de comprensión?, y si así lo fuera, ¿cuáles son algunas de estas clasificaciones?. Pero no todas las proposiciones en esta línea, que se traducen en conceptualizaciones de la comprensión, la entienden de la misma manera.

Tres acercamientos a esta noción son planteados por Johnson & Johnson (1989), Van Hiele (1957) y Gardner (1993, en Barquero 2002). El primero define comprensión como el modo en que estamos significativamente en nuestro mundo, utilizando para ello nuestras interacciones corporales, instituciones, contextos culturales y tradiciones lingüísticas. Esta ubicación en el entorno, adecuada según nuestra percepción, es resaltada por Van Hiele en su estudio sobre el aprendizaje de la geometría, en el cual define *comprensión* como la estructuración de un campo perceptivo que paulatinamente se convertirá en una estructuración lingüística. Señala que la comprensión incluye la capacidad de ofrecer una explicación paso a paso de lo que se hace, actuando de manera adecuada ante situaciones que todavía no aparecen en el proceso de aprendizaje de una persona. Gardner, asume una posición más amplia con respecto al tema, al definir comprensión como la capacidad de adquirir conocimientos, aptitudes, conceptos, y aplicarlos en forma adecuada a nuevas situaciones. Así,

> Si alguien sólo repite cuando se le enseña, no sabemos si el individuo comprende. Si una persona aplica el conocimiento en forma promiscua, sin que tenga importancia si es apropiado, entonces yo no diría que comprende […] Pero si la persona sabe dónde aplicar y dónde no aplicar los conocimientos y puede hacerlo en situaciones nuevas, entonces comprende (citado en Barquero, 2002; p. 26).

Por otra parte, en el caso específico de las matemáticas (Gómez, s.f.; Perkins y Simmons, 1988; Boix y Gardner, 1999; Hercovics y Bergeron en Contreras 1994), la noción de comprensión ha sido estudiada identificando diversos niveles o tipos; como es el caso de Gómez (s.f.), quien detalla tres categorías de comprensión según los desempeños de la persona:

- Comprensión Instrumental: es posible aplicar las reglas para cada caso específico, sin necesidad de saber las razones de su funcionamiento.
- Comprensión Relacional: se sabe qué hacer en cada paso concreto (instrumental); pero además pueden relacionarse estos procedimientos con conocimientos más generales.
- Comprensión Integral: puede reconstruirse el camino que llevó a un resultado, conociendo las justificaciones de los pasos que se siguen.

Contreras (1994), aunque no define explícitamente qué es *comprensión en matemáticas*, nombra una clasificación en cuatro niveles propuesta por Herscovics y Bergeron. El primero, *comprensión intuitiva*, se refiere a un conocimiento matemático informal (por ejemplo, el concepto de unión asociado al de suma, o superficie al de área), lo que traducimos en una comprensión más elemental que la primera presentada por Gómez y que retoma la naturaleza "perceptiva" mencionada por Johnson & Johnson y Van Hiele. La *comprensión de procedimientos*, el segundo nivel, concuerda con el nivel instrumental de la tipología anterior, añadiendo la necesidad de relacionar el conocimiento intuitivo con los procedimientos. La *abstracción matemática*, se define como el distanciamiento de todo procedimiento de su representación concreta, buscando la construcción de invariantes y generalizaciones. Finalmente, la *formalización*, se refiere a la identificación de axiomas y justificaciones lógicas, a definiciones formales y el uso de un simbolismo matemático para referirse a las nociones con cierto grado de abstracción.

Otras tipologías son ampliamente abordadas en Perkins y Simmons (1988) y Boix y Gardner (1999), introduciendo niveles de comprensión en términos de marcos (esquemas internamente coherentes y particularmente independientes unos con los otros) y desempeños (uso adecuado de los conceptos, teorías, narraciones y procedimientos disponibles en un dominio), respectivamente.

De estos aportes sobre la comprensión, además de reconocer cierta compatibilidad en que, como bien lo afirma Perkins (1999), *la comprensión se da por niveles*, en general identificamos dos aspectos comunes: por un lado, el carácter instrumental-aplicacional como un primer nivel de comprensión, que permite a las personas resolver problemas. Por otra parte, una exigencia mayor que implica la integración o relación de conceptos y la justificación de procedimientos o de elementos teóricos que se emplean al resolver un problema.

La discusión llevada a cabo hasta el momento sobre el concepto de *comprensión*, y su desglose en distintas categorías, nos conduce a asumir la hipótesis que efectivamente es posible considerar el análisis de la comprensión por niveles y a su vez nos permitirá aclarar la noción de *comprensión profunda*, tan exigida a los docentes en el marco de las tendencias actuales.

2.3. Concepción de comprensión utilizada en el estudio

La noción de comprensión puede ser abordada empleando distintos y diversos modelos, los cuales establecen las etapas necesarias para la construcción del conocimiento. En nuestro estudio, se entenderá *comprender* como: la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Es decir, la comprensión de un tópico es la “capacidad de desempeño flexible” (Perkins, 1999, p. 70), la capacidad de adaptación ante las condiciones que impone o exige una situación problemática que se pretende resolver.

Diremos que un estudiante muestra una determinada comprensión de una noción matemática según las secuencias de actos (explicar, justificar, extrapolar, vincular, aplicar,...) que evidencia. Asumimos que la “apropiación de un significado”, y por lo tanto la comprensión que de la noción asociada, es producto de un proceso dinámico, progresivo y no lineal, que se desarrolla en los distintos dominios de experiencia y contextos institucionales en que se participan.

Al entender comprensión de esta manera, las secuencias de actos que realice el estudiante permitirá clasificar la comprensión que tenga la noción. Los niveles de comprensión construidos para este trabajo se describen en la cuarta sección.

3. Referente metodológico

3.1. El problema

A partir del marco expuesto en la sección anterior sobre el perfil esperado de un profesor de matemáticas en Secundaria, deducimos que la *comprensión*, de los temas a enseñar por los docentes, debería ser un objetivo primordial y orientador del Plan de Estudios que detalle una formación profesional.

Si asumimos la hipótesis que existe una correlación directa entre la comprensión del contenido y la capacidad de gestión en la clase, y agregamos una cierta monotonía que se evidencia en ejercicios rudimentarios y elementales en los libros de texto (documento referencial básico de un profesor debutante), la interrogante sobre la comprensión por parte de los docentes resulta necesaria.

Además, tomando en cuenta que, por un lado, en un estudio preliminar realizado por las investigadoras[6] se identificaron importantes limitaciones en los estudiantes del último nivel de profesorado en la comprensión del tema razones trigonométricas; y por otra parte, la Trigonometría es una de las unidades más demandadas a tratar durante las capacitaciones de los docentes, estudiar la comprensión que tienen los profesores de ciertos contenidos en esta área, es un primer paso para mejorar, desde el punto de vista de la formación profesional, la enseñanza de las matemáticas.

El tema razones trigonométricas es relevante para los profesores de matemáticas, por estar en el plan de estudios de noveno año vigente (MEP, 2001). Se pretende que el estudiante pueda:

- Establecer el concepto de cada una de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente de un ángulo agudo, valorando la importancia de la trigonometría en el desarrollo del conocimiento matemático y tecnológico.

[6] Trabajo final del curso FD-5095 Investigación en Educación Matemática, II-ciclo 2002.

- Aplicar procedimientos para calcular los valores de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente, para ángulos agudos de un triángulo rectángulo, a partir de las medidas de los lados.
- Aplicar razones trigonométricas para determinar medidas de lados y ángulos de un triángulo rectángulo.
- Aplicar las razones trigonométricas en la resolución de problemas que involucran la altura de un triángulo, diagonales de paralelogramos, situaciones físicas o del entorno.
- Aplicar las razones trigonométricas en la resolución de problemas donde se utiliza el ángulo de elevación y de depresión.

Con base a las proposiciones anteriores, consideramos oportuno plantearnos las preguntas siguientes: *¿Qué nivel de comprensión del tema de razones trigonométricas evidencian estudiantes de la carrera de Bachillerato en Enseñanza de la Matemática de la UCR?, ¿cómo podemos determinar el nivel de comprensión del tema razones trigonométricas, es decir, con cuáles indicadores y con qué tipo de tareas?*

3.2 Objetivos Generales

1. Desarrollar un conjunto de tareas, criterios e indicadores que resulten apropiadas para valorar la comprensión del tema razones trigonométricas.
2. Estudiar la comprensión de las razones trigonométricas que evidencian estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la UCR.

3.3. Participantes y criterios de selección

El estudio contó con dos tipos de participantes: a) tres estudiantes de la carrera de Bachillerato en Enseñanza de la Matemática de la UCR que hayan obtenido el título de profesor y que estuvieran matriculados en el curso FD-0555 Seminario de la Enseñanza de la Matemática el primer semestre del 2004; b) expertos que inciden en la forma en que se enseña y valora la Trigonometría conforme al programa de estudios del MEP.

En el plan de estudios de la carrera de Enseñanza de la Matemática, el curso FD-0555 se encuentra en el sétimo ciclo y es requisito para obtener el título de bachiller. De los 15 estudiantes matriculados, los tres participantes se escogieron bajo los siguientes criterios: mayor cantidad de cursos aprobados hasta el sétimo ciclo, graduados del Profesorado en la Enseñanza de la Matemática en la UCR y haber respondido la mayor cantidad de preguntas de la encuesta que se aplicó. Dado que nuestro estudio es uno de los primeros en abordar la comprensión de nociones trigonométricas en nuestro país, y teniendo en cuenta que asumimos especificidad de los criterios de análisis según el tema asociado, la disciplina y la población; clasificamos nuestro trabajo de naturaleza exploratoria; privilegiando disminuir el número de estudiantes participantes a tres.

Los expertos en educación matemática y los que ejercen influencia en ella, se seleccionaron de manera que se incluyeron: dos profesores de Matemáticas de Enseñanza Media (P_1 y P_2 con al menos 10 años de experiencia en Secundaria), dos profesores de Matemáticas de la Escuela de Formación Docente de la UCR (F_1 y F_2 con al menos dos años de experiencia en los cursos de licenciatura que ofrece dicha escuela) y dos matemáticos profesores de la Escuela de Matemáticas de la UCR (M_1 y M_2 con al menos diez años de experiencia y que hayan dado cursos de Matemáticas propios de la carrera de Enseñanza).

La selección de cada experto estuvo sujeta a la disponibilidad de horario, tanto del participante como de las encargadas del trabajo.

3.4. Técnicas de recolección de información

Para determinar las formas en que se ha venido estudiando la comprensión en matemáticas, se realizó una *revisión bibliográfica*: análisis documental, preparación de fichas y análisis de contenido del material recolectado alrededor de los ejes temáticos de interés[7].

Escogidos los expertos participantes, se llevó a cabo una *entrevista* a cada uno con base en preguntas orientadoras[8], formuladas a partir de la revisión bibliográfica. Esto con el fin de que sus aportes permitieran elaborar una lista de indicadores de comprensión de las razones trigonométricas.

Para recolectar la información que permitió elegir a los estudiantes participantes en la investigación, se aplicó una *encuesta* a la totalidad de alumnos matriculados en el curso FD-0555 Seminario de Enseñanza de la Matemática de la UCR en el año 2004. Ésta incluía principalmente, preguntas sobre la trayectoria académica de los estudiantes.

Las tareas[9] propuestas se construyeron basadas en el trabajo sistemático realizado con anterioridad en la investigación, el aporte bibliográfico y el de los expertos; de manera que concordaran con la lista de indicadores elaborada. Dichas tareas se validaron por criterio de experto.

Se trabajó con los estudiantes seleccionados en tres momentos distintos. Durante las dos primeras sesiones se aplicaron las tareas y se realizó una entrevista a cada estudiante acerca de las razones que justifican los procedimientos utilizados en sus desempeños. Un *plenario* se desarrolló en la tercera sesión para discutir con los estudiantes las impresiones a

[7] Definiciones, nociones de comprensión en general y en particular en matemáticas, niveles de comprensión establecidos en investigaciones realizadas en el campo de la educación y compatibles con las hipótesis cognitivas y epistemológicas asumidas.
[8] Qué es comprensión en matemáticas y en particular aquella de los temas que el docente enseña. Habilidades, algoritmos, definiciones, nociones; que una persona debe reflejar (cómo reconocer su presencia) para resolver problemas o ejercicios que ellos mismos consideren relevantes (y las razones de su importancia) que involucren las razones trigonométricas. Además del por qué, para qué y cómo se debe enseñar el tema en secundaria.
[9] Se entiende por *tarea matemática* un conjunto de actividades, ejercicios, problemas y/o demostraciones sobre un tema matemático.

raíz de las tareas efectuadas, su comprensión y su formación profesional. Tanto las entrevistas como la sesión grupal fueron audiograbadas.

3.5. Criterios de análisis

Con respecto a la información bibliográfica se seleccionaron aquellos documentos en los que se identificaban las aplicaciones de las razones trigonométricas en otras disciplinas o dentro de las matemáticas. Así como asociados a las diversas perspectivas con las que se ha abordado la comprensión en matemáticas.

De los documentos relacionados con la comprensión, se eligieron aquellos que reflejaban una tendencia donde la persona tenga participación activa en el proceso de aprendizaje, es decir, no se considere al sujeto un ente pasivo-receptivo.

A partir del panorama construido sobre cómo se ha venido trabajando la compresión en matemáticas, se elaboraron cinco preguntas que orientaron la entrevista semi-estructurada a cada experto. Sus aportes se analizaron de dos maneras: comparándolos entre sí, filtrando las similitudes y discrepancias; y comparándolos con la teoría sobre cómo se ha venido trabajando la comprensión. Esto con el fin de construir una primera versión de los posibles niveles de comprensión y sus indicadores.

De las respuestas obtenidas se consideraron principalmente las "comunes", donde hayan coincidido al menos tres expertos, interpretándolas en términos de: conceptos centrales o destrezas para el dominio o aplicación de nociones y procedimientos trigonométricos, en particular concernientes a las razones trigonométricas; niveles de complejidad de los conceptos o destrezas anteriores; contextos de aplicación, formas de visualizar y representar los conceptos; y requerimientos para la adquisición de lo señalado en los puntos anteriores.

Las trazas de los estudiantes de las tareas aplicadas, se analizaron según las similitudes con los indicadores previamente elaborados. De manera que si la interpretación de los datos coincide con los indicadores propuestos para un nivel (considerando los niveles elaborados para la investigación) en un porcentaje mayor o igual a 80, se acordó que la comprensión del participante se ubica en ese nivel. De la información obtenida en las entrevistas que posteriormente se realizaron, se interpretó la confirmación o no de los indicadores propuestos.

En la siguiente sección, expondremos los resultados relacionados únicamente con el tema de las razones trigonométricas, aunque hacemos la acotación que en la investigación fuente de este artículo, se consideraron otros como la ley de senos y la ley de cosenos[10].

4. Resultados

4.1. Condiciones sugeridas por expertos

De las respuestas brindadas por los expertos, se deduce que las características que deben verificarse para valorar los niveles de comprensión del tema razones trigonométricas son las siguientes: conocer los contenidos matemáticos, tener un dominio procedimental de tales conceptos o contenidos, poseer la habilidad para manipularlos, aplicarlos y adaptarlos para resolver una situación en particular. Además de, desarrollar una cierta estructura lógica o base conceptual que permita argumentar mejor los razonamientos; así como visualizar los conceptos formando esquemas mentales que permitan establecer las relaciones entre ellos. Se remarcó también, tener la capacidad de contestar a ciertas preguntas y dudas de los estudiantes o proponer ejercicios novedosos y ejemplos más adecuados según el contexto y la población a quien van dirigidos.

[10] Para profundizar en los temas, sugerimos referirse a la memoria de la investigación; Araya, Monge y Morales (2004)

Todos los participantes consideran que una de las características que deberían integrar el perfil de un profesor de Matemáticas de Secundaria para enseñar el tema de razones trigonométricas es que domine el contenido matemático que va a enseñar. En este sentido, resaltamos que la mayoría de los expertos entiende por comprensión la aplicación de los conocimientos a una situación en particular. Los entrevistados orientarían un curso de Trigonometría hacia una línea teórica/práctica. La mayoría de ellos incluirían aplicaciones a problemas que les resulten contextualizados a los estudiantes.

Algunas discrepancias serían que los profesores de la Escuela de Matemática colaboradores en el estudio, no resaltan la importancia de considerar los conocimientos previos del estudiante si tuvieran que dar un curso de Trigonometría. Para algunos de ellos no es tan importante que los profesores conozcan sobre la historia de esta rama.

4.2 Comprensión: niveles, indicadores y tareas

Considerando las tipologías de comprensión presentadas en el referente conceptual y las condiciones sugeridas por los expertos (sección 4.1), se construyeron los niveles de comprensión: Instrumental, Relacional y Formal. Cada uno de ellos operacionalizados con indicadores que se asocian a las tareas empleadas. A continuación presentamos los niveles construidos y las exigencias incluidas en cada uno de ellos.

Nivel Instrumental: Corresponde a un primer nivel de comprensión del objeto o tema, visto como una herramienta que le permite resolver problemas. Una persona alcanza este nivel si es capaz de utilizar conceptos, definiciones, fórmulas, teoremas o algoritmos. Logra resolver el problema (llega a la respuesta esperada) sin necesidad de saber las razones de los elementos empleados en el proceso.

Nivel Relacional: Puede vincular los contenidos matemáticos con otra área dentro y fuera de las matemáticas. En este nivel no basta con saber cuál método funciona, sino que es necesario adaptarlos a los nuevos problemas.

Nivel Formal: La persona es capaz de reconstruir el camino que lo llevó a un resultado ofreciendo explicaciones de sus razonamientos, así como formas de probar las afirmaciones y ofrecer evidencias que justifiquen las fórmulas o resultados que usó. En este nivel la persona es crítica, la construcción del conocimiento se ve como una tarea compleja y puede comunicar lo que se sabe de manera creativa a otros.

Tomando como guía estos niveles de comprensión, se adaptaron y/o construyeron cinco tareas que a su vez corresponden a los objetivos detallados en la sección 3.1 propuestos por el MEP, en torno al tema de las razones trigonométricas. Las tareas se elaboraron tomando como base los contextos usuales de aplicación, y para su solución fueron necesarios los conceptos evaluados y asumidos construidos a lo largo de la formación del docente.

La primera tarea (T1) es una adaptación de un ejercicio tomado de la página web de The Math Forum de la Universidad Drexel[11]. La Física Matemática, como área de aplicación de la Trigonometría, orientó la elaboración de la tarea número dos (T2). Para la solución de esta tarea solo fueron necesarios conocimientos que asumimos estudiados en el curso FS-0226 Física para la Enseñanza, contemplado en el plan de estudios del Profesorado en la Enseñanza de la Matemática.

A partir de una revisión bibliográfica (Klinger, 1978; Nelson, 1993; Wilson, 1996) que sirvió para identificar los problemas que surgieron en la historia de la Trigonometría y cómo fueron evolucionando los objetos matemáticos a lo largo del tiempo, se adaptó la tarea 3

[11] http://mathforum.org/

(T3). Las tareas 4 y 5 (T4 y T5 respectivamente) fueron elaboradas por las investigadoras. El detalle de cada tarea se presenta en el Anexo 1.

La integración de los niveles de comprensión y las tareas, se puntualiza con los indicadores construidos según el desempeño esperado en cada tarea. De acuerdo al tipo de interrogante, se favorecen más indicadores de un nivel que de otro. En el Anexo 2, incluimos una tabla que así lo detalla.

4.3 Comprensión de las razones trigonométricas

La correspondencia entre los indicadores de comprensión por nivel y los desempeños de los estudiantes, se resume en la tabla siguiente:

		Nivel de comprensión					
		Instrumental		*Relacional*		*Formal*	
		Fr	*%*	*Fr*	*%*	*Fr*	*%*
Participante	*A*	30/34	**88**	6/8	75	4/9	44
	B	31/36	**86**	5/11	45	4/11	36
	C	27/36	75	8/9	**88**	1/10	10

Tabla 1: Frecuencia y porcentajes de indicadores según el desempeño del participante

Los participantes A y B se posicionan en el nivel instrumental; el cual se considera elemental e indispensable para un docente de la disciplina[12], con un alto porcentaje de coincidencia con los indicadores (88% y 86% respectivamente). Las definiciones, conceptos, fórmulas, teoremas o algoritmos básicos que según este nivel son requeridos para resolver los problemas, pueden interpretarse presentes en la mayoría de los desempeños de estos dos estudiantes.

[12] El carácter indispensable y elemental radica en su coincidencia con las tareas matemáticas orientadas por los objetivos del Programa de Estudio del MEP en trigonometría. Es decir, incluyen los

Las dificultades en este primer nivel (principalmente para C), recaen en la interpretación de los enunciados, el empleo de ciertas fórmulas y en el uso de algunos procedimientos algebraicos (despeje de la incógnita cuando ésta se encuentra en el denominador de uno de los miembros de la ecuación y la solución de una ecuación cuadrática), lo que ameritaría el estudio de algunos conceptos geométricos y algebraicos ligados más a sus aplicaciones.

En T1, A y B convergen en una interpretación falsa sobre dónde ubicar en un dibujo la distancia entre el avión y el aeropuerto; confundiéndola con la separación entre dicha terminal y el punto en donde se interseca la altura del avión con el suelo. Por el contrario, C ubica correctamente los datos que considera relevantes (Ver figura 1).

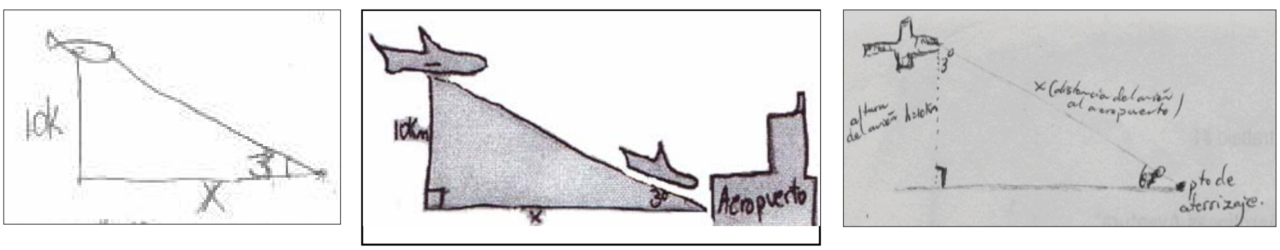


Figura 1: Trazas escritas de los estudiantes A, B y C respectivamente.

En el nivel relacional, que demanda la vinculación de los contenidos con otros de áreas dentro y fuera de las matemáticas, ubicamos únicamente al participante C. En general, las relaciones entre conceptos trigonométricos (imagen de funciones trigonométricas, razones trigonométricas, otras relaciones entre ángulos de un triángulo y sus lados) y ciertos conceptos geométricos o algebraicos, parecieran suficientemente débiles como para no llegar a ser una herramienta exitosa para el estudiante en la resolución de problemas (por ejemplo para ubicar un ángulo de incidencia en T4a).

conceptos, técnicas y habilidades mínimas que finalmente le serán encargadas de enseñar a los estudiantes de noveno y quinto año en la Educación Pública (MEP, 2001).

Las respuestas escritas y orales dadas por los participantes B y C, indican el uso indiferente del símbolo « = » tanto para valores exactos como aproximados. Lo que señala, sea una confusión de lo que es la imagen irracional de una función trigonométrica o, una escasa precisión al comunicar los resultados encontrados. Por el contrario, las respuestas dadas por A, sí discriminan el uso del símbolo « = » y « ≈ ».

En cuanto al nivel formal, ninguno de los participantes logra reconstruir el camino que les llevó a los resultados obtenidos. Al explicar sus razonamientos, los argumentos que brindan son escasos y superfluos, no logran (para la mayoría de las tareas donde se solicitó) probar sus afirmaciones u ofrecer evidencias que justifiquen las fórmulas o resultados en uso.

El hecho que ninguno de los participantes alcance el nivel formal y solo uno el relacional, refleja una comprensión del tema razones trigonométricas que les limita a realizar tareas que demanden de ellos únicamente memorización y aplicación sistemática de un teorema o de una definición. Estas limitantes resultan críticas cuando los rasgos de la sociedad en donde estamos inmersos, espera del estudiante la construcción de recursos y "herramientas intelectuales" que le permitan dar significado y resolver situaciones problemáticas.

Una de las conclusiones descritas por los participantes del estudio, identifica ciertos conceptos, técnicas, justificaciones o relaciones entre los contenidos matemáticos discutidos, como ausentes claves en el plan de estudios de la carrera en la que están inscritos. Así por ejemplo, el comentario del participante A al explicar por qué no sabía cómo se definían las razones trigonométricas:

> Son cuestiones en las que, cómo te dijera, específicamente uno nunca las ha visto aquí. Qué es el asunto, bueno es un tema, así como Trigonometría, como parche, y que diay, a mí más bien me extraña que en esto no se dé un conocimiento riguroso de lo que es, porque hasta para otras carreras hay un curso de Trigonometría que se llama Trigonometría Plana y Esférica. Si, yo creo que es para Arquitectura. Es un tema

> que está estipulado, y que hay que verlo igual que todos, y de una manera contundente, eso es. Yo pienso, que al menos el programa de estudio de nosotros está flojo (junio, 2004).

Como es evidente, los resultados de este estudio no tienen como objetivo ser generalizados a toda la población de egresados del Profesorado en Enseñanza de la Matemática. Su fin es profundizar sobre las posibles razones por las cuales un docente de Matemáticas no alcanza los niveles de comprensión aquí establecidos. Para lo cual, entre otros factores influyentes, la formación profesional tanto en el área de la matemática, la pedagogía y la didáctica de esta disciplina, tiene un valor considerable.

5. Conclusiones

La experiencia de las autores y los resultados sobre los niveles de comprensión de los participantes, sugieren que la formación de los docentes de matemáticas en el área de Trigonometría, podría no estar satisfaciendo los requerimientos mínimos para enseñar ciertos temas de forma no mecánica (ausencia de explicaciones y justificaciones).

Las proponentes de este trabajo, como egresadas de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la UCR, se unen a las observaciones de los participantes, en tanto al estudio de los temas trigonométricos como *contenidos de relleno* de otros cursos como: Principios de Matemáticas, Cálculo o Análisis. Pero las deficiencias en la comprensión de ciertos temas trigonométricos no radican tan solo en la ausencia de un curso propio de éstos en la formación del docente. Es indispensable hacer partícipe al estudiante, en primer lugar, de un modelo de enseñanza que evidencie las aplicaciones de los contenidos en la resolución de problemas, vinculados con otros de distintas áreas. Esto con el fin, en segundo lugar, de justificar la necesidad de construir o fomentar el desarrollo de una comprensión instrumental, relacional y formal; para finalmente, poner en práctica estrategias cuyo objetivo sea dicha construcción.

En este punto de la reflexión, nos preguntamos en qué medida la disociación existente en la estructuración de la carrera, en donde se presenta la formación matemática por un lado y la formación pedagógica y didáctica por otro, es una posible causa de la formación fragmentaria que finalmente reflejamos los estudiantes egresados de ésta.

Gran parte de las prácticas docentes diarias en el aula de Matemáticas en este país (y nos podríamos interrogar, con la seguridad de no formular una pregunta trivial, sobre los fenómenos al respecto a nivel internacional), parecieran ser testimonio de la repercusión de la escasa comprensión que los profesores tienen sobre algunos temas. Ya que transitivamente, las propuestas metodológicas empleadas para enseñarlos, tienden a limitar a los estudiantes a realizar tareas que demanden de ellos únicamente memorización y aplicación sistemática de contenidos.

Un panorama invariante y poco prometedor se esperaría entonces de la enseñanza de esos contenidos, *nublados* para el docente, si no se disponen de medidas regeneradoras que interrumpan el círculo vicioso que describe: la formación pública obligatoria, el paso por la universitaria para ese alumno que optó por la enseñanza de las matemáticas y su desempeño como formador de futuros ciudadanos que será circunscrito (entre otros factores) a su nivel de comprensión.

El compromiso con la formación de los futuros ciudadanos, en nuestro caso valiéndonos de las matemáticas, demanda indudablemente, una capacidad analizadora de las prácticas educativas que la formación universitaria debería de fomentar. Sin embargo, es la experiencia reflexiva en el aula, la que permite tomar conciencia de las necesidades y fortalezas que cada profesor tiene, y el compromiso personal, el motor para asumir una actitud de formación permanente.

6. Recomendaciones y sugerencias

Los resultados de este estudio no tienen como objetivo una generalización a la totalidad de docentes de Matemáticas. Al ser un estudio explorador, su fin radica en iniciar una línea de investigación sobre "Niveles de comprensión de profesores de Matemáticas", buscando impactar el diseño y la acción en los cursos del plan de estudios de la Carrera en la UCR.

Para futuros estudios recomendamos:

- Utilizar una muestra significativa de profesores en ejercicio no sólo debutantes, sino también "expertos". Considerar la posibilidad de realizar un estudio comparativo con estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de distintas universidades. Esto con el fin de canalizar mejor los elementos contextuales que favorecen la comprensión.
- A nivel metodológico, complementar las técnicas de recolección de datos con observaciones en colegios y en los "cursos de servicio" introductorios de matemática impartidos por profesores debutantes.
- Ampliar la descripción de cada nivel de comprensión que se construya. Si bien es cierto los tres niveles presentados en este trabajo buscaron integrar los aportes de fuentes escritas y orales; resulta indispensable especificar dentro de cada uno de ellos las secuencias de acciones que los integran. Así como los elementos que ofrecen diversos contextos para identificarlas.

7. Referencias

Araya, Andrea, Monge, Adriana y Morales, Carolina. (2004). **Comprensión en las razones trigonométricas: niveles de comprensión, propuesta de indicadores y diseño de tareas para su análisis**. Tesis de Licenciatura en Enseñanza de la matemática. San José: Universidad de Costa Rica.

Barquero, Javier. (2002). **Los efectos de la aplicación de los talleres impartidos por la Asesoría de Matemáticas de la Dirección Regional de Puriscal, para impulsar la aplicación de enfoques metodológicos alternativos para la enseñanza de las operaciones fundamentales**. Tesis de Licenciatura en Enseñanza de la matemática. San José: Universidad de Costa Rica.

Boix, Verónica y Gardner, Howard. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En **La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica**. Buenos Aires: Paidós.

Brousseau, Guy. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. 7(2), 33-115.

Contreras, Ileana. (1994). El rol del profesor de matemáticas en la educación secundaria: un referente teórico para su estudio. **Revista Educación**. 18(1), 75-84.

Klinger, Fred. (1978). **¿La Trigonometría?... ¡Pero si es muy fácil!**. Barcelona: Boisareu Editores.

Godino, Juan Diego. (1996a). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. En **Proceeding of the 20th PME Conference**. Valencia.

Godino, Juan Diego. (1996b). El análisis didáctico del conocimiento matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. En **Proceeding of the 22th Internacional Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Sur Africa: University of Stellenbosch..

Godino, Juan Diego. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen?. **Revista Uno: Competencias matemáticas**. España: Editorial Graó.

Goffree, Fred. (2000). Principios y paradigmas de una "educación matemática realista" . En **Matemáticas y Educación** (pp. 151-167). Barcelona: Graó.

Hilton, Peter. (2000). Necesidad de una reforma. En **Matemáticas y Educación** (pp. 79-90). Barcelona: Graó.

Johnson David y Johnson Roger. (1989). **Cooperation and competition: Theory and research**. MN: Interaction Book Company.

Ministerio de Educación Pública. (2001). **Programa de Estudios Matemática III Ciclo**. San José, Costa Rica.

Nelson, Roger. (1993). **Proofs Without Words**. USA: The Mathematical Association of America, pp. 30-31.

Perkins, David. (1999). ¿Qué es la comprensión?. En **La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica**. Buenos Aires: Paidós.

Perkins, David y Simmons, Rebecca. (1988). Patterns of misunderstanding an integrative model for science, math and programming. **Review of Educational Research**. 58(3), 303-326.

Santaló, Luis. (1994). Una nueva caracterización de la enseñanza y del conocimiento matemático escolar. Implicaciones sobre el papel del profesor. En **El educador en la enseñanza de la matemática**. San José: EUNED.

Sierpinska, Anna. (1994). **Understanding in mathematics**. London: The Falmer Press.

Stone, Martha. (1999). ¿Qué es la enseñanza para la comprensión? En **La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica**. Buenos Aires: Paidós.

Van Hiele, Pierre. (1957). **El Problema de la comprensión**. Alemania: Tesis de Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales. Alemania: Universidad Real de Utrecht.

Wilson, Jerry. (1996). **Física**. México: PRENTICE HALL HISPANOAME

Anexo 1: Tareas aplicadas a los estudiantes.

Tarea 1 *(T1)*

La sobrecargo pregunta:

- ¿Alguno de ustedes sabe matemática?

Usted se levanta para ver qué se le ofrece, y le dice:

- Tal vez yo la puedo ayudar, ¿cuál es el problema?
- Estamos volando actualmente a una altitud de aproximadamente 10 kilómetros y experimentamos dificultades técnicas –sobrecargo

Usted comprende que se necesita su ayuda, así que toma su calculadora y camina hacia el frente del avión para ofrecer su colaboración al piloto, que parece un poco enfermo y desorientado.

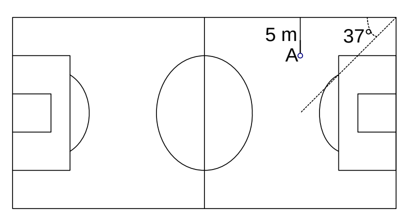
- Me estoy sintiendo muy mal y no puedo pensar –el piloto
- ¿Qué puedo hacer para ayudar? –pregunta usted
- Necesito deducir cuándo debe comenzar el descenso. ¿Qué tan lejos del aeropuerto debe de estar el avión, si quiero descender con un ángulo de 3°? -piloto-.

El piloto se observa peor cada segundo transcurrido.

- ¡Eso es fácil! –exclama usted. Veamos. Estamos a una altitud de 10km y queremos aterrizar en la pista con un ángulo de 3°. Hmmmm

¿Qué tan lejos del aeropuerto le dijo usted al piloto que empezara el descenso?

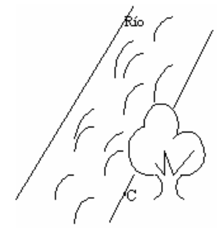
Tarea 2 *(T2)*



En la cancha de fútbol del barrio está entrenando el equipo de la Universidad. El entrenador le solicita a tres jugadores (Juan, Pedro y Daniel) que practiquen los tiros de esquina.

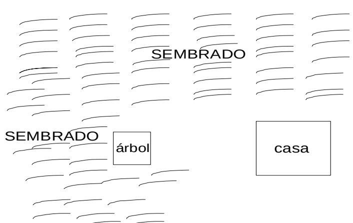
Juan tira el balón con una velocidad de 10m/s sobre la diagonal y con un ángulo de 37° en relación con la diagonal de la media cancha. Daniel se encuentra ubicado en el punto A de la figura y corre con una velocidad constante de 4m/s en forma paralela al ancho de la plaza. Transcurridos 3s, ¿logrará Daniel encontrarse con el balón para rematar al marco defendido por Pedro?

Tarea 3 *(T3)*



Está cerca de un ancho río y necesita conocer la distancia hasta la otra orilla, supongamos que hasta el árbol ubicado a la orilla del río, marcado en el dibujo por la letra C (para simplificar, ignoremos la 3era dimensión). ¿Cómo hacerlo sin cruzar el río?

Tarea 4a *(T4a)*

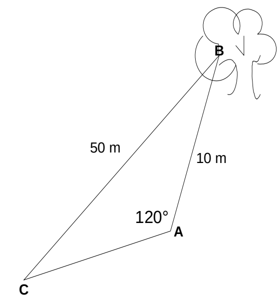


Un campesino desea averiguar la altura de un árbol de Eucalipto ubicado a un costado de su casa, pues el árbol está viejo y seco, esto pone en peligro la seguridad de su familia, por lo tanto decide talarlo para evitar un accidente. Si usted fuera este campesino, ¿cómo encontraría la altura para asegurarse que el árbol no caiga sobre la casa al cortarlo?

Tarea 4b *(T4b)*

En el problema anterior, suponga que los rayos del sol están incidiendo en ese lugar con un ángulo de 59°, la casa se encuentra aproximadamente a 30m del árbol y la sombra del árbol es de 19m. ¿Qué precauciones debe tomar el campesino al cortar el árbol?

Tarea 5 *(T5)*



Suponga que está observando los entrenamientos de tiro de pelota que están realizando los seleccionados nacionales para las próximas olimpiadas de Atenas 2004. Uno de los atletas (punto A) toma como referencia para iniciar el impulso uno de los árboles de la plaza (punto B) ubicado a 10m de él. Luego de hacer un recorrido con su brazo de 120° tira la pelota y ésta cae a una distancia de 50m (punto C) respecto al punto B. ¿Qué tan lejos tiró el atleta la pelota?

Anexo 2:

Indicadores de comprensión asociados a las tareas aplicadas a los estudiantes[13]

Nivel	Indicadores	Tarea					
		T1	T2	T3	T4 a	T4 b	T5
Instrumental	1. Interpreta correctamente los datos	X	X	X	X	X	X
	2. Hace los dibujos pertinentes para realizar la tarea, según su interpretación	X	X	X	X	X	
	3. Cuando se le brinda el dibujo coloca los datos en forma acertada						X
	4. Resuelve la ecuación que se plantea	X	X	X	X	X	X
	5. Utiliza la razón trigonométrica seno, coseno o tangente cuando sea requerida	X	X	X	X	X	X
	6. Resuelve correctamente la tarea, es decir, llega a la respuesta esperada	X	X	X	X	X	X
	7. Averigua los metros que avanzó el balón		X				
	8. Obtiene los metros que corrió Daniel		X				
	9. Halla el ángulo aproximado para que Daniel se encuentre con el balón		X				
	10. Obtiene la velocidad que debería tener Daniel para encontrarse con el balón		X				
	11. Aplica correctamente la ley de senos o la ley de cosenos						X
	12. Utiliza el signo correcto cuando calcula sen120º ó cos120º						X
	13. identifica el ángulo de referencia de 120º						X
	14. Escriba la fórmula: $\cos(2\alpha)$ ó $\cos(\alpha+\beta)$, ó $\mathrm{sen}(2\alpha)$ ó $\mathrm{sen}(\alpha+\beta)$						X
	15. Aplica triángulo especial 30º-60º para hallar el sen60º o cos60º						X
	16. Indica la diferencia entre los valores exactos y aproximados de las razones trigonométricas	X	X	X		X	X

Nivel	Indicadores	Tarea					
		T1	T2	T3	T4 a	T4 b	T5
Relacional	1. Sabe que la medida del segmento que pasa por el punto C perpendicular al trayecto que camina la persona es la menor distancia entre los dos puntos			X			
	2. Indica cómo encontrar el ángulo o los ángulos necesarios para resolver la tarea			X			
	3. Determina el ángulo de incidencia del sol, a partir de las sombras producidas por éste				X		
	4. Puede calcular cos120º ó sen120º, sin usar la calculadora						
	5. Sabe resolver la ecuación $x^2+10x-2400=0$, sin usar la calculadora						X

[13] Los indicadores que no se asocian a alguna tarea, están relacionados con las preguntas de las entrevistas a los estudiantes

	6. Encuentra utilidad a las razones trigonométricas						
	7. Justifica la utilidad de resolver problemas de este tipo	X	X	X	X	X	X
	8. Con ayuda de los ejercicios propuestos conectan lo que han aprendido con las experiencias de la vida cotidiana						
	9. Conoce la conexión entre resolución de ecuaciones y las propiedades fundamentales del sistema de los números reales						
Formal	1. Justifica la congruencia de ángulos entre paralelas	X					
	2. Demuestra la ley de senos o la ley de cosenos						X
	3. Demuestra la identidad sen(2θ)=senθ·cosθ						X
	4. Argumenta un procedimiento para obtener el signo de cos120º						X
	5. Argumenta la validez del procedimiento mediante el ángulo de referencia para obtener el sen120º ó cos120º						X
	6. Se ha preguntado la veracidad de las fórmulas de la trigonometría que utiliza	X	X	X	X	X	X
	7. Escribe las pruebas (o intentos de éstas) con rigurosidad matemática para que las investigadoras comprendan la demostración						X
	8. Justifica las definiciones de las razones trigonométricas	X	X	X	X	X	
	9. Justifica las aproximaciones de seno, coseno y tangente, proporcionados por la calculadora	X	X	X		X	
	10. Da una justificación de la ley de cosenos utilizando los dibujos que aparecen en la “prueba sin palabras”						X
	11. Da una justificación de la fórmula del cos(α-β) y sen(α-β) utilizando los dibujos que aparecen en la “prueba sin palabras”						X

Dibujos que aparecen en la “prueba sin palabras”:

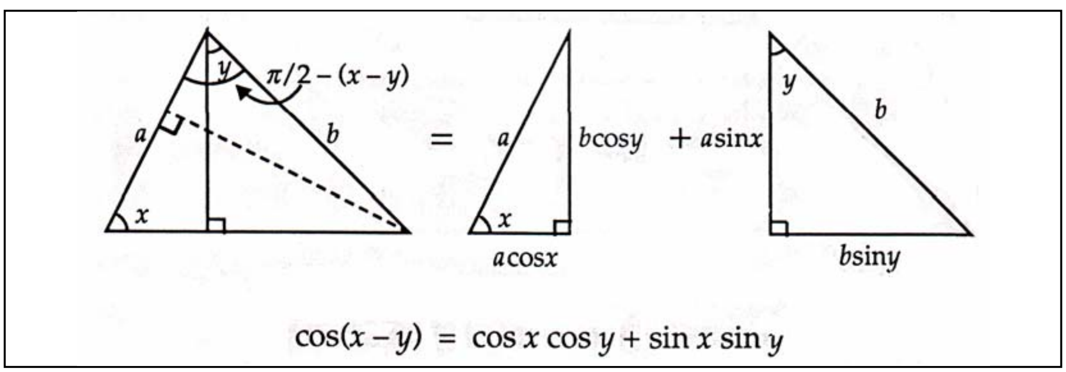


Figura 2: “Prueba sin palabras” del coseno de una diferencia

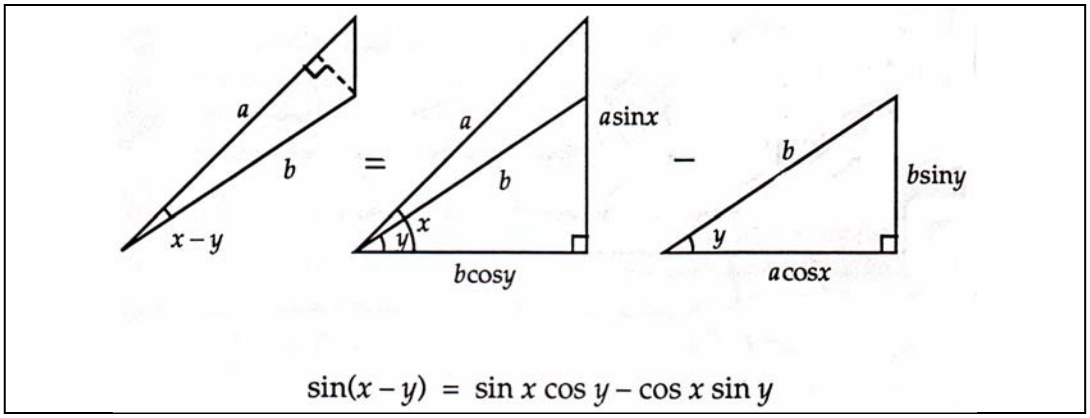


Figura 3: "Prueba sin palabras" del seno de una diferencia

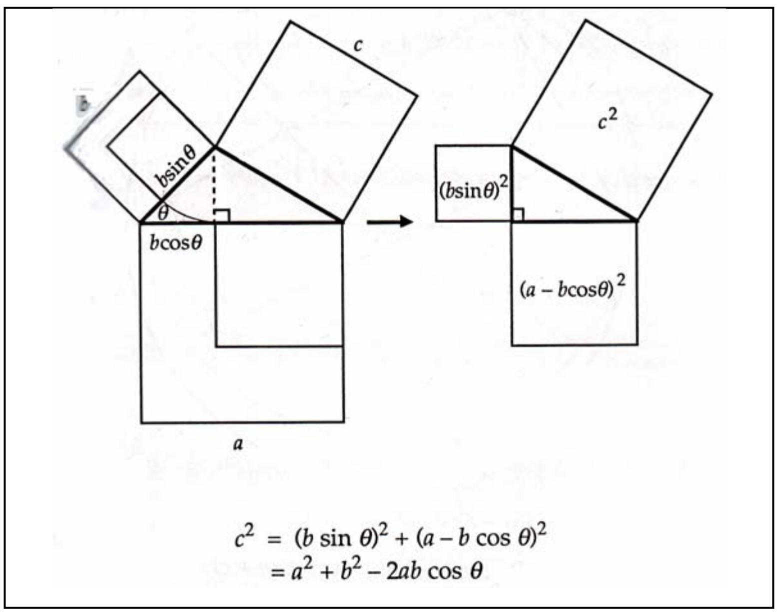


Figura 4: "Prueba sin palabras" de la Ley de cosenos