

Fracciones y números fraccionarios en la escuela elemental: el caso de la escuela primaria cubana¹

Celia Rizo Cabrera

Luis Campistrous Pérez

Centro de Investigación en Matemática Educativa

Universidad Autónoma de Guerrero

México

celrizo@yahoo.com.mx

Resumen²

En la ponencia se discute el problema del tratamiento de las fracciones en la escuela básica y las dificultades que este concepto entraña para los alumnos. En particular se analiza el problema de la distinción entre los conceptos de igualdad y equivalencia en el trabajo con las fracciones, la posibilidad y necesidad de introducirlos a ambos y los obstáculos que puede representar.

Finalmente se discute la forma que este problema ha sido enfrentado en la escuela cubana y la solución que se dio al problema en ocasión del último perfeccionamiento de la escuela de Educación General en Cuba. En particular se insiste en cómo lograr la diferenciación de los conceptos de fracción y número fraccionario y la necesidad de introducirlos, así como los trasfondos teóricos que hay detrás de ello.

Palabras clave

Fracciones, Números fraccionarios, primaria cubana.

Abstract

In the paper the problem of teaching fractions in elementary school and the difficulties that this concept entail for students are discussed. In particular the problem of distinguishing between the concepts of equality and equivalence in working with fractions, the possibility and necessity of introducing them both and obstacles that may represent are analyzed. Finally the way this problem has been addressed in Cuban schools and the solution given to this problem on the occasion of the last school improvement General Education in Cuba is discussed. In particular, emphasis is placed on how to achieve the differentiation of the concepts of fraction and fractional number, and the need to introduce said differentiation, as well as the relevant theoretical background.

Key words

Fractions, fractional numbers, Cuban elementary education.

¹ Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la I CEMACYC, celebrada en Santo Domingo, República Dominicana el año 2013.

² El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1 Introducción

Algunas preguntas que se pretende responder en esta conferencia son las siguientes:

1. ¿Qué es una fracción?
2. ¿Qué relaciones se pueden establecer entre las fracciones?
3. ¿Cuáles son los principales errores que se introducen en la formación del concepto de fracción en la escuela elemental (quinto y sexto grado)?
4. ¿Qué papel puede jugar la inclusión de otros conceptos como es el caso del concepto de número fraccionario? ¿En qué se diferencia una fracción de un número fraccionario?
5. ¿Cuál puede ser una introducción que contemple la introducción del concepto número fraccionario?
6. ¿Qué particularidades tiene la introducción didáctica en el caso de la igualdad y la equivalencia de fracciones?
7. El caso de la escuela primaria cubana.

A modo introductorio cabe destacar que uno de los conceptos que más dificultades presenta en la escuela básica es el de fracción. Estas dificultades en el trabajo con fracciones han sido abordadas en numerosas investigaciones y trabajos realizados en diferentes países. No obstante, la experiencia en la práctica, recogidas en investigaciones recientes al menos en el caso de México, muestran que este problema sigue sin resolverse en la escuela y que los alumnos de la educación básica siguen arrastrando las dificultades que históricamente se han presentado en el tema. En relación con el mismo, una de las investigadoras que más ha profundizado en el tema en los últimos años, la Dra. Isabel Fandiño, llegó a establecer 14 significados distintos para el concepto mediante la revisión de las investigaciones en diferentes periodos (Fandiño, 2005, citado por Flores, 2010). Estos catorce significados se enuncian a continuación:

- La fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua y a veces discreta.
- La fracción como cociente.
- La fracción como relación.
- La fracción como operador.
- La fracción como probabilidad Duval.
- La fracción en los puntajes.
- La fracción como número racional.
- La fracción como punto de una recta orientada.
- La fracción como medida.
- La fracción como indicador de cantidad de elección.
- La fracción como porcentaje.
- La fracción en el lenguaje cotidiano.
- La conceptualización de las fracciones y la teoría de Vergnaud.
- La conceptualización de la fracción: signo-objeto de Duval.

No obstante lo que se ha trabajado en diferentes partes del mundo acerca del concepto de fracción, indudablemente es uno de los conceptos que más dificultades presenta para ser comprendido y bien utilizado en la práctica por los alumnos. Algunas manifestaciones de esas dificultades, tomadas en este caso en el Estado de Guerrero en México, en investigaciones realizadas por los autores de este trabajo, bajo el concurso de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, se ilustran a continuación.

En la escuela cubana se ha tratado de resolver esta situación, a partir del hecho de que en realidad en el tratamiento de las fracciones se presentan dos conceptos fundamentales: el de **fracción como un simple par de números naturales que expresan partes de una unidad que ha sido dividida en partes iguales** y la cual se le atribuyen diferentes significados, y el de **la fracción como clase** (posteriormente haremos una resignificación de esta denominación) de fracciones “equivalentes a una dada” que ya solo no representa una división de un todo en partes iguales, sino todas aquellas que pueden representar esa misma situación.

En el caso de la escuela cubana, el tratamiento este nuevo dominio numérico al que se denomina **conjunto de los números fraccionarios**, para diferenciarlo del de las fracciones, se inicia formalmente en el quinto grado de la escuela primaria. El mismo se continúa en sexto grado y en séptimo se sistematiza lo de sexto grado y se concluye. Se caracteriza por el intento de hacer una implementación didáctica, acorde a las edades (12 años en adelante) sin perder el carácter científico de la enseñanza que es un principio de la escuela cubana.

La vía utilizada para la elaboración de este concepto es partir de problemas de la práctica que ilustren la necesidad de tener otros números, además de los naturales y para ello se sigue una vía didáctica con una fundamentación matemática muy clara:

- Se **introducen las fracciones como partes de un todo**, significado que está muy relacionado con la necesidad práctica de dividir en partes iguales cantidades enteras (lo que se le denomina el todo).
- Aparece la situación de que **hay fracciones diferentes que representan la misma parte de un todo**. Eso es un inconveniente para el significado del concepto y para su uso porque, aunque nos posibilita operar con fracciones que no sean de igual denominador, también constituye un problema muy importante para la práctica. Precisando la idea anterior se tiene que si uno quiere dividir algo en partes iguales no siempre lo puede hacer directamente: es más fácil dividir a la mitad un pastel, después en la mitad de las mitades (en cuartos) y así sucesivamente, hasta llegar a la cantidad de partes iguales que aproximadamente satisfaga el número de posibles comensales. Al final se tendrán en n veces, $1/n$ partes iguales.
- Se introduce el concepto de fracciones equivalentes para aquellas que se obtienen unas de otras por ampliación o simplificación y se precisa que **dos fracciones son equivalentes si y solo si sus productos cruzados son iguales**.
- Se destaca el hecho de que las fracciones equivalentes representan la misma parte de un todo y se introduce la notación decimal para representar las clases de equivalencia.
- Se denomina “número fraccionario” al conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada. Matemáticamente hablando, este paso significa introducir en el conjunto

de las fracciones la relación de “ser equivalentes” para el caso en que sus productos cruzados sean iguales. Se tiene así el concepto de “números fraccionarios” que es asignado al conjunto de las “clases de equivalencia” de las fracciones que son equivalentes entre sí (sus productos cruzados son iguales).

- Se introduce la notación decimal que es la que se corresponde exactamente con el concepto introducido, para el caso de fracciones de denominadores expresados como potencias de 10.

Esta idea de **clase de equivalencia** se materializa en el gráfico siguiente, que aparece en la página 55 del libro *Matemática sexto grado* (1990) de la escuela cubana, y que en la actualidad sigue vigente.

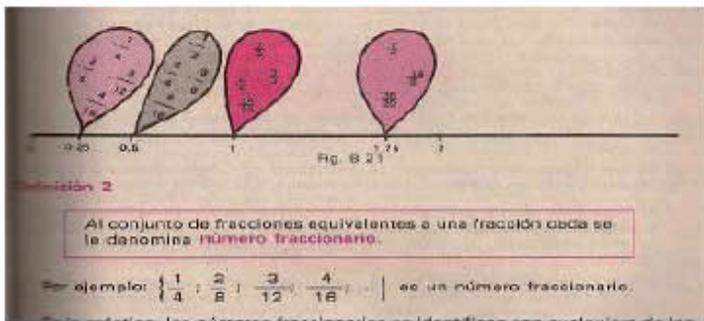


Figura 1: Fragmento de la página 55 de *Matemática sexto grado* (1990) de la escuela cubana.

Como se puede apreciar en el referido gráfico, a continuación del mismo aparece de inmediato un recuadro con la siguiente definición:

Definición 2:

Al conjunto de fracciones equivalentes a una fracción dada se le denomina **número fraccionario**.

Se da a continuación un ejemplo de un **número fraccionario**, que copiado textualmente lo expresan, en la página 55 del libro de texto, tal como aparece en el gráfico anterior:

Por ejemplo: $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \dots \right\}$ es un número fraccionario.

A continuación, en esa misma página se acompaña el ejemplo anterior con la siguiente indicación que es la que posibilita su utilización en la práctica:

“En la práctica, los números fraccionarios se identifican con cualquiera de las fracciones que lo forman, por ello estos números también se representan por fracciones, escritas como fracciones comunes o en notación decimal”.

A partir de ese momento, se establece que al conjunto de los números fraccionarios se le denomina por Q y se precisa que el conjunto de los números naturales es un subconjunto de Q .

Se puede observar en el referido ejemplo que sobre un «rayo numérico» se han representado fracciones equivalentes a 0,25 ($1/4$), a 0,5 ($1/2$), y así sucesivamente, que se agrupan en una especie de globo que **representa la clase de equivalencia respectiva**.

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \dots \right)$$

A cada una de estas clases de equivalencia se hace corresponder un único punto del rayo numérico. En este grado de la escuela cubana ya se introducen las definiciones y la de este concepto es la segunda definición de este capítulo de geometría. Como se aprecia, se representa un número fraccionario en forma conjunta para hacer visible que el número en cuestión no es más que «el conjunto de las fracciones equivalentes a... ».

Esta introducción permite atender al principio del carácter científico de la enseñanza, rector en la educación cubana, y evitar obstáculos didácticos que se deben fundamentalmente a la forma en que históricamente se ha tratado el tema en la escuela básica. No obstante, reiteramos que esto requiere una implementación didáctica adecuada para favorecer la comprensión de los alumnos de una manera coherente y significativa para ellos porque es obvio que esta concepción tiene detrás un componente matemático fuerte que está algo oculto para los alumnos.

No obstante, así se pueden dar significados correctos desde el punto de vista científico a las operaciones con números fraccionarios y evitar el excesivo formalismo que genera el aprender reglas que carecen de un significado fundamentado en definiciones adecuadas y correctas desde el punto de vista de la Matemática como en el ejemplo antes dado de la definición 2. Por ejemplo es bien conocido el hecho de que en la escuela elemental lo normal es introducir la adición de fracciones mediante la “regla de los productos cruzados”: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab + cd}{bd}$ pero no siempre se explica por qué debe hacerse así y por tanto se convierte en una regla que alumnos y maestros repiten sin una fundamentación adecuada y que, por tanto, se olvida con facilidad al punto que algo después los alumnos la han olvidado y ya no pueden calcular. Este hecho impacta la práctica escolar.

La utilización del concepto número fraccionario como clase de equivalencia permite explicar el proceso de adición y fundamentar su definición sin necesidad de recurrir a reglas que es preciso memorizar, en efecto basta escoger en cada número fraccionario (en cada clase) dos fracciones que tengan el mismo denominador y sumar en la forma natural que se infiere a partir del significado como parte todo, que es el que se prioriza en la presentación que se hace en la escuela cubana. De igual manera se procede con la sustracción.

Obviamente esta forma de introducir, desde edades tempranas, conceptos matemáticos que se sustentan en relaciones de equivalencia, que están por detrás de muchos de otros conceptos tales como la igualdad, el paralelismo, la semejanza, contribuye a la

formación matemática de los alumnos y le da un carácter verdaderamente científico al proceso educativo. Con respecto a lo antes planteado, en muchas concepciones de lo que se hace en la escuela se refieren a este carácter científico, pero que no siempre se puede estructurar para hacer una implementación didáctica y comprensible para los alumnos.

Para finalizar es imprescindible destacar que la escuela cubana de educación general, de primero a decimosegundo grado, tiene un plan de estudios único y los libros son igualmente únicos elaborados, a partir de ese plan, por equipos de investigadores y maestros destacados que fueron seleccionados para ese trabajo, estos planes y su concepción fueron discutidos con maestros a lo largo de todo el país. Esta forma de implementación facilita la atención especializada que requiere la introducción de nuevos planes y programas, en el caso de Cuba en la que la educación es totalmente masiva y está estructurada de igual forma en todo el país.

Hay que tener en cuenta que, además, el **sistema** de atención metodológica a todos los maestros del país está organizado en función de estas nuevas concepciones y preparado previamente para poder ejercer esa atención con toda responsabilidad y científicidad. En el caso del contenido escolar, los diferentes programas y textos se introdujeron paulatinamente a partir del año 1989 en forma escalonada: el primer grado se introdujo previamente; en 1989, 2°, 5°, 7° y 10°. Este esquema se mantuvo, finalmente el 4° quedó para ser introducido solo y cerró el ciclo. De este modo se garantizó la unidad de enfoque y contenido de 1° a 12° grados. Paralelamente se fue preparando a todo el personal involucrado en su implementación, desde la nación, las provincias y los municipios correspondientes.

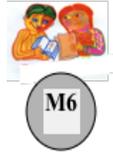
Bibliografía

- Campistrous, L. (1973). *Números fraccionarios, folleto para maestros*. Editorial del Ministerio de Educación de la República de Cuba.
- Campistrous, L. Rizo, C. (2011). Algunas implicaciones de la filosofía marxista para la enseñanza de la matemática: el caso de Cuba. *Revista Iberoamericana de Educación*. N.º 56, pp. 179-199 (1022-6508)
- Fandiño, I. (2009). *Las Fracciones: Aspectos Conceptuales y Didácticos Cooperativa*. Editorial Magisterio Bogotá, Colombia.
- Flores R. (2011). *Los significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria*. ALME 24 2011.
- Quintana A. y Gort M. (2008). Los números racionales. Consultar en http://matematica.cubaeduca.cu/index.php?option=com_content&view=article&id=10878:8vou1tema1-sistematizacion-sobre-el-orden-y-las-operaciones-con-los-numeros-fraccionarios&catid=312&Itemid=73
- Rizo, C. y otros (1991). *Matemática 5° grado* Editorial Pueblo y Educación. Cuba.
- Rizo, C. y otros (1992). *Matemática 6° grado* Editorial Pueblo y Educación. Cuba.

Anexo



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
 UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICA
 Proyecto de Evaluación del Aprendizaje de las Matemáticas
 como Producto Final de la Escuela Primaria



MATEMÁTICAS SEXTO GRADO

Curso 2010-2011

Querido alumno: Necesitamos saber lo que has aprendido sobre fracciones hasta el momento. Por esta razón te pedimos que realices las actividades que se indican. ¡Esfuézate y trabaja lo mejor que puedas! ¡GRACIAS POR PARTICIPAR!

Nombre del alumno (a):	Número de lista:
Edad: Sexo: Masculino	Femenino:
Nombre de la escuela:	Clave:
Fecha:	

1. Completa la siguiente tabla. Ten en cuenta lo que has aprendido sobre fracciones.

SE REPRESENTA	SE ESCRIBE	SE LEE
	$\frac{3}{5}$	
		Cuatro décimos

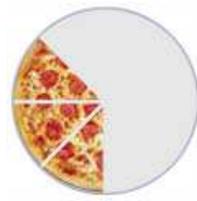
2. De un pastel dividido en **12 porciones iguales**, David se come **dos de esas porciones** y Amparo se come **una porción** del mismo.
 - (a) ¿Qué fracción del pastel se comió cada uno?
 - (b) ¿Qué fracción del pastel se comieron entre los dos?
 - (c) ¿Quién comió más pastel? ¿Por qué?
 - (d) ¿Qué fracción del pastel sobra?
3. Calcula lo que se te indica en cada inciso:
 - (a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$
 - (b) $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}$
 - (c) $\frac{4}{3} - \frac{3}{4}$
4. En una pizzería cortaron tres pizzas **en partes iguales** y de cada una de ellas queda lo que se indica en el gráfico. Si todo lo que queda de las tres pizzas estuviera dividido en octavos, ¿cuántos pedazos de $\frac{1}{8}$ de pizza quedan en total?



$\frac{1}{2}$
(Una mitad)



$\frac{1}{4}$
(Un cuarto)



$\frac{3}{8}$
(Tres octavos)

5. En Chichihualco, Guerrero, los habitantes acostumbran a comprar leche en los establos. María todos los días compra 1.75 litros de leche para su familia, pero debe elegir las botellas donde el lechero se la entregará. En el establo sólo hay botellas vacías de 1 litro, $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ de litro. Ayúdale a María a elegir, **de 2 formas distintas**, las botellas en donde se llevará la leche. Ten en cuenta que siempre las llevará completamente llenas de leche.



Botellas de 1 litro



Botellas de $\frac{1}{2}$ litro



Botellas de $\frac{1}{4}$ litro

Primera forma:

Segunda forma: