Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 18 · N°. 1 · 2025
43-60
Recibido: 08/10/2024
Aprobado: 12/11/2024

Artículos de investigación

SALA DE AULA INVERTIDA NO ENSINO DE FATORAÇÃO ALGÉBRICA: UM ESTUDO SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO EVIDENCIADO POR ESTUDANTES BRASILEIROS DO 8° ANO

FLIPPED CLASSROOM EN LA ENSEÑANZA DE LA FACTORIZACIÓN ALGEBRAICA: UN ESTUDIO SOBRE EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EVIDENCIADO POR ESTUDIANTES BRASILEÑOS DE 8° GRADO

Vilmar Gomes da Fonseca[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3313-9485

Matheus de Carvalho Terra[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0003-7214-7124

RESUMO

O desenvolvimento do pensamento algébrico é um dos principais objetivos do ensino da álgebra. Este artigo busca compreender o pensamento algébrico evidenciado por estudantes brasileiros do 8° ano do Ensino Fundamental, sobre a fatoração algébrica. O estudo teve por base uma experiência de ensino híbrido, utilizando a metodologia de sala de aula invertida, composta por um processo cíclico de atividades instrucionais, exploratórias e avaliativas, integrando tecnologias digitais e um jogo didático. Busca-se, ainda, compreender o impacto da sala de aula invertida no desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. A coleta de dados incluiu a gravação em áudio das aulas e as produções escritas e digitais dos estudantes na resolução das tarefas, sendo analisados qualitativamente, considerando dois elementos, referidos na literatura, como vertentes do pensamento algébrico: representar e raciocinar. De modo geral, os estudantes foram capazes de interpretar expressões fatoradas, destacando os fatores comuns ou representando o valor algébrico das raízes quadradas dos termos quadráticos. Além disso, demonstraram a habilidade de mobilizar adequadamente processos de raciocínio matemático, como classificação, comparação e justificação, ao aplicarem as técnicas de fatoração por agrupamento e por diferença de quadrados. Evidenciam-se algumas dificuldades, especialmente na generalização da técnica de fatoração por agrupamento. Ao final, retiramos algumas implicações educacionais desses resultados.

1 Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências (PROPEC), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Nilópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 26530-060. vilmar.fonseca @ifrj.edu.br

2 Pós-graduação Lato Sensu (Especialização) em Ensino de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Nilópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 26530-060. matheuscterra@gmail.com

Palabras clave: Pensamento algébrico, Fatoração algébrica, Sala de aula invertida, Raciocínio matemático.

RESUMEN

El desarrollo del pensamiento algebraico es uno de los principales objetivos de la enseñanza del álgebra. Este artículo busca compreender el pensamiento algebraico evidenciado por estudiantes brasileños de 8º grado de la Educación Básica, sobre la factorización algebraica. El estudio se basó en una experiencia de enseñanza híbrida utilizando la metodología flipped classroom, consistente en un proceso cíclico de actividades instructivas, exploratorias y evaluativas, integrando tecnologías digitales y juego didáctico. El objetivo es también comprender el impacto de la flipped classroom en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. La recolección de datos incluyó grabaciones de audio de las clases y las producciones escritas y digitales de los estudiantes al resolver las tareas, que fueron analizadas cualitativamente, considerando dos elementos referidos en la literatura como aspectos del pensamiento algebraico: representar y razonar. En general, los alumnos fueron capaces de interpretar expresiones factorizadas, destacando factores comunes o representando el valor algebraico de las raíces cuadradas de términos cuadráticos. Además, demostraron ser capaces de movilizar adecuadamente procesos de razonamiento matemático, como la clasificación, la comparación y la justificación, al aplicar las técnicas de factorización por agrupamiento o por diferencia de cuadrados. Hubo algunas dificultades, especialmente en la generalización de la técnica de factorización por agrupamiento. Por último, extraemos algunas implicaciones educativas de estos resultados.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, Factorización algebraica, Flipped classroom, Razonamiento matemático.

1. INTRODUÇÃO

A Álgebra é um dos principais ramos da Matemática e essencial para a compreensão de diversos conceitos matemáticos (NCTM, 2000). No ensino da Álgebra escolar, a literatura salienta a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, o qual é caracterizado por um conjunto de processos cognitivos que suportam a compreensão dos conceitos algébricos (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Chimoni et al., 2020; Godino et al., 2012; Ponte et al., 2009). Esses estudos sugerem que o pensamento algébrico seja estimulado através da interpretação e representação de registros algébricos e da exploração de processos de raciocínio matemático, como classificar, generalizar e justificar, para descrever situações e resolver problemas.

No entanto, pesquisas recentes indicam que os estudantes enfrentam dificuldades na aprendizagem da Álgebra na educação básica devido à natureza epistemológica abstrata dos conceitos algébricos e ao desenvolvimento inadequado do pensamento algébrico (e.g. Bianchini & Lima, 2021; Chimoni et al., 2020; Guadagnini et al., 2021). Esses estudos apontam que essa dificuldade é agravada pelo ensino inadequado, que se limita à exposição de conteúdos sem a interação dos estudantes e à repetição mecânica de procedimentos sem construção de significado e conexão com representações subjacentes. Há, por isso, uma necessidade urgente de investigar como melhorar as práticas didáticas no ensino da Álgebra e encontrar soluções para ajudar os estudantes a superar essas dificuldades.

Nesse contexto, Ponte et al., (2009) propõem que o ensino de conceitos algébricos deve focar em práticas didáticas que promovam a aprendizagem ativa e experiências significativas, desenvolvendo o pensamento algébrico. Estudos mostram que o ensino híbrido, com o uso da metodologia de sala de aula invertida, que combina atividades presenciais com uso de jogos e/ou tecnologias digitais é reconhecido por criar ambientes de aprendizagem inovadores e eficazes, potencializando o aprendizado dos estudantes sobre conceitos de álgebra (Bacich et al., 2015; Fonseca et al., 2023a).

Considerando que a metodologia de sala de aula invertida (termo em inglês: *flipped classroom*), quando bem planejada e implementada, pode gerar resultados muito positivos na aprendizagem de conceitos matemáticos pelos estudantes (Fonseca et al., 2023a), torna-se relevante realizar uma experiência de ensino visando promover a aprendizagem de fatoração algébrica entre estudantes do 8º ano de uma escola pública, no Brasil. Essa experiência baseou-se na implementação de duas aulas híbridas que incorporam essa metodologia.

Neste texto, apresentamos parte dos resultados de um estudo que busca compreender o pensamento algébrico evidenciado por esses estudantes sobre fatoração algébrica. Procuramos responder às seguintes questões: i) Como é que os estudantes interpretam e/ou representam expressões algébricas fatoradas?; ii) Que procesos de raciocinios matemáticos são movilizado pelos estudantes para fatorar expressões algébricas?

Este estudo pretende contribuir para a investigação sobre a aprendizagem da álgebra escolar, lançando luz sobre como descrever e analizar o pensamento algébrico com base em elementos que auxiliem os estudantes a aprimorá-lo, melhorando a compreensão dos conceitos algébricos, e como propostas didáticas que utilizam a sala de aula invertida podem apoiar o desenvolvimento desse pensamento.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Para o desenvolvimento deste trabalho, é essencial uma clara definição dos conceitos que serão abordados e analisados. Assim, nesta seção, serão aprofundados temas centrais, como a aprendizagem da fatoração algébrica, o pensamento algébrico relacionado à fatoração algébrica e a metodologia de sala de aula invertida no ensino de Matemática.

2.1 APRENDIZAGEM DE FATORAÇÃO ALGÉBRICA

A fatoração algébrica é um tema relevante nas orientações curriculares para o ensino de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental destinado a estudantes com idades entre 12 e 15 anos. Ela consiste na decomposição de uma expressão algébrica em um produto de fatores que, quando multiplicados, retornam à expressão original (Guadagnini et al., 2021). Entre os tipos de fatoração, destacam-se a fatoração por agrupamento, que é aplicada em expressões com dois ou mais termos, resultando uma forma fatorada que inclui os fatores comuns da expressão original; e a fatoração por diferença de quadrados, usadas em expressões da forma $a^2 - b^2$, com $a, b \in \mathbb{R}$, permitindo reescrevê-las como $(a + b)(a - b)$. As técnicas de fatorações são ferramentas importantes na simplificação de frações algébricas (Chevallard, 2023; Guadagnini & Dias, 2022).

O desenvolvimento de habilidades relacionadas à fatoração algébrica é fundamental na educação básica, pois estabelece uma base sólida para o aprendizado da matemática (Chevallard, 2023). Os estudantes devem, por exemplo, compreender os processos de fatoração em relação aos produtos notáveis, como assimilar que o quadrado da soma de dois termos $(a + b)^2$ corresponde a $a^2 + 2ab + b^2$, o que será útil ao estudo de funções racionais (Ponte et al., 2009). Além disso, é importante que saibam obter expressões equivalentes por meio de fatorações, aplicando essas técnicas na resolução de equações e no estudo de funções (NCTM, 2000).

Guadagnini e Dias (2022) destacam a importância de combinar diferentes tipos de fatoração, ou aplicar repetidamente o mesmo tipo de fatoração, ao simplificar uma expressão algébrica. Um exemplo disso é a fatoração da expressão $(x^3 - 4x) - 2(x - 2)$. Inicialmente, utiliza-se a técnica de fatoração por agrupamento no binomio $x^3 - 4x$, reescrevendo-o como $x(x^2 - 4)$. Em seguida, aplica-se a técnica de fatoração por diferença de quadrados ao produto, resultando em $x(x - 2)\ (x + 2)$. Por fim, utiliza-se a fatoração por agrupamento na expressão $x(x - 2)\ (x + 2) - 2(x - 2)$, obtendo-se a forma fatorada da expressão $(x - 2)\ [x(x + 2) - 2]$.

Apesar da importância da fatoração algébrica no currículo da educação básica, a literatura aponta que os estudantes enfrentam dificuldades no aprendizado desse conceito. Entre as principais estão: i) a dificuldade em compreender a noção de fator comum; ii) fragilidade no reconhecimento e na generalização de padrões algébricos, como na aplicação de produtos notáveis; iii) a incapacidade de combinar diferentes tipos de fatoração para simplificar expressões algébricas; e iv) dificuldades na manipulação dos termos algébricos de uma expressão para aplicação do processo de fatoração (Chevallard, 2023; Guadagnini et al., 2021, NCTM, 2000).

Para ajudar os estudantes a superar essas dificuldades, a literatura destaca a importância de desenvolver o pensamento algébrico. Promover o desenvolvimento adequado desse pensamento pode contribuir para uma melhor compreensão da fatoração algébrica, além de facilitar a assimilação de conceitos correlatos, como equações fracionárias e funções racionais (Chevallard, 2023; Ponte et al., 2009).

2.2 O PENSAMENTO ALGÉBRICO ASSOCIADO À FATORAÇÃO ALGÉBRICA

O pensamento algébrico abrange os processos cognitivos que facilitam a compreensão dos conceitos algébricos. Isso inclui a interpretação de registros algébricos (símbolos e proposições), a generalização e a aplicação de conceitos algébricos para resolver problemas em diferentes contextos (Blanton & Kaput, 2005; Radford, 2010).

Esse pensamento se manifesta de várias formas, incluindo a aritmética generalizada, que usa conceitos aritméticos para fazer generalizações; o pensamento funcional, que generaliza padrões numéricos para descrever relações funcionais; a modelagem, que formaliza essas generalizações; e a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos (Chimoni et al., 2020). A literatura também reconhece que o ensino dos conceitos algébricos deve integrar duas vertentes do pensamento algébrico: *representar* e *raciocinar* (Ponte et al., 2009).

Nesse sentido, *representar* refere-se à capacidade de interpretar os registros algébricos e traduzí-los em diferentes representações. A interpretação de registros algébricos inclui saber ler, compreender e operar com símbolos algébricos e evidenciar o sentido do símbolo em diferentes contextos (Blanton & Kaput, 2005). Tem-se por exemplo, a atribuição de significados aos termos algébricos e a identificação de fatores comuns em expressões algébricas. Por outro lado, a tradução dos registros algébricos envolve a transformação desses registros em diferentes formas de representação. Isto inclui converter uma expressão algébrica em sua forma verbal ou gráfica e vice-versa, bem como transformar uma expressão fatorada em sua representação algébrica correspondente (Ponte et al., 2009).

A vertente *raciocinar* envolve a capacidade de fazer inferências justificadas, tanto dedutivas quanto indutivas, com base na relação e generalização de ideias matemáticas por meio de registros algébricos (Jeannotte & Kieran, 2017). A habilidade de raciocinar matematicamente é essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico, e envolve processos de classificação, comparação, generalização e justificação (Chimoni et al., 2020; Ponte et. al, 2009).

Nesse sentido, a *classificação* refere-se à capacidade de organizar e categorizar informações com base em critérios específicos, utilizando o pensamento lógico e a análise (Jeannotte & Kieran, 2017). Um exemplo disso é classificar uma expressão algébrica, como caso particular de um trinômio quadrado perfeito e, em seguida, aplicar a regra da soma ou diferença de quadrados para fatorá-la (Guadagnini & Dias, 2022). Por sua vez, a *comparação* refere-se ao processo de busca de semelhanças ou diferenças em objetos ou relações matemáticas (Jeannotte & Kieran, 2017). Tem-se por exemplo, comparar expressões algébricas com as identidades de produtos notáveis, visando fatorar e simplificar essas expressões (Guadagnini et al., 2021).

A *generalização* é frequentemente usada para estabelecer relações válidas para uma certa classe de objetos (Ponte et al., 2009). No contexto das expressões algébricas, isso envolve a generalização de padrões algébricos, expressa por meio de uma identidade algébrica (Guadagnini et al., 2021). A *Justificação* refere-se à capacidade de obter conclusões ou descobertas fundamentadas a partir de um processo lógico com base em premissas (Chimoni et al., 2020). Isso inclui validar ou refutar conjecturas usando argumentos lógicos, hipóteses, definições e propriedades algébricas como, por exemplo, justificar a fatoração de trinomio quadrado perfeito com base na aplicação da identidade de produto notável (Ponte et al., 2009).

Para alcançar uma compreensão adequada dos conceitos algébricos, é importante que os estudantes sejam submetidos a experiências didáticas que integrem esses dois aspectos do pensamento algébrico. Quando bem planejadas e executadas, essas experiências proporcionam aos estudantes oportunidades para desenvolver habilidades no uso de símbolos e proposições algébricas, essenciais para essa compreensão (Ponte et al., 2009).

2.3 A SALA DE AULA INVERTIDA NO ENSINO MATEMÁTICA

A sala de aula invertida (*flipped classroom*) é uma metodologia de ensino híbrido que inverte a ordem das atividades tradicionais realizadas nas aulas (Bergmann & Sams, 2012). Em vez de estudar novos conteúdos durante a aula e deixar a prática para casa, os estudantes estudam o material em casa usando recursos como vídeos instrucionais, podcasts e leituras orientadas (Chen & Wu, 2015). O tempo de aula é então dedicado à discussão, aprofundamento e aplicação do conhecimento adquirido, por meio de atividades individuais e/ou em grupo (Lo et al., 2017).

Embora a metodologia da sala de aula invertida esteja em processo de adoção por professores, ela tem atraído a atenção de pesquisadores em educação matemática devido aos seus benefícios significativos (Fonseca et al., 2023b; Lo et al., 2017; Valente, 2014). Entre os principais benefícios estão: (i) maior interação e participação dos estudantes nas aulas, promovendo habilidades sociais e trabalho em equipe; (ii) melhor compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes; e (iii) maior satisfação com os materiais e métodos de ensino. Esses aspectos indicam que a sala de aula invertida tem o potencial de transformar o ensino tradicional de matemática, oferecendo uma experiência de aprendizagem mais ativa e envolvente em comparação com o ensino expositivo convencional.

No entanto, a implementação dessa abordagem enfrenta desafios importantes. Criar ou selecionar materiais adequados, como vídeos e leituras, pode ser trabalhoso, especialmente em escolas com recursos limitados ou onde o acesso a dispositivos e internet é restrito (Fonseca et al., 2023b). Além disso, a metodologia exige que os estudantes sejam mais autônomos em seu aprendizado, o que pode ser um desafio ao ser implementada em classes com um grande número de estudantes (Valente, 2014). A avaliação também é um ponto crítico, pois métodos tradicionais podem não refletir com precisão o engajamento e a compreensão dos estudantes (Lo et al., 2017). Esses desafios ressaltam a necessidade de mais pesquisas para explorar as potencialidades da sala de aula invertida e aprimorar sua adoção.

Valente (2014) ressalta que não há um modelo único de sala de aula invertida, as tarefas e recursos podem variar de acordo com o contexto e os objetivos educacionais. No entanto, segundo a Flipped Learning Network (2014), quatro aspectos são essenciais na construção da sala de aula invertida: (i) um ambiente de aprendizagem flexível que atenda às necessidades individuais dos estudantes, (ii) a instrução intencional com atividades interativas para o ensino do conteúdo, (iii) a aprendizagem ativa que promove a prática e aplicação do conhecimento; e (iv) o feedback imediato, que proporciona orientação dinámica aos estudantes.

Um modelo de sala de aula invertida que se alinha a esses aspectos e é relevante para os objetivos deste estudo é apresentado por Fonseca et al. (2023b), detalhado na Figura 1. Este modelo, resultado de pesquisas realizadas, desde 2020, pelos membros do projeto 'Techschool – Tecnologias na Escola e Formação de Professores' (que inclui os autores deste artigo). O modelo propõe um processo cíclico composto por três atividades: Instrucional, Exploratória e Avaliativa.

Figura 1. Esquema do processo cíclico da sala de aula invertida.

Fonte: Fonseca et al. (2023b).

A atividade instrucional tem como objetivo fornecer aos estudantes o conteúdo a ser estudado antes da aula, em um local conveniente para eles. Nessa fase, a instrução é realizada por meio de recursos digitais como videoaulas e quizzes, focando na explicação e exemplificação do conteúdo. Isso prepara os estudantes para a atividade exploratória, realizada em sala de aula e com o apoio do professor, onde o conteúdo é aprofundado através de uma prática de ensino exploratório, contemplando a realização de tarefas que integram recursos didáticos manipuláveis e tecnologias digitais. A atividade avaliativa, por sua vez, avalia as aprendizagens dos estudantes por meio da resolução de tarefas que integram problemas.

O que distingue este modelo de outros descritos na literatura é seu caráter cíclico. O processo inicia-se com a definição dos objetivos de aprendizagem, que orientam as atividades instrucional, exploratória e avaliativa. Os materiais de ensino, tais como tarefas, quizzes, videoaulas e testes, são desenvolvidos para ajudar os estudantes a atingirem esses objetivos. Assim, o caráter cíclico das três fases descritas torna-se evidente. É importante destacar que todas as etapas da sala de aula invertida devem estar alinhadas com os objetivos de aprendizagem previamente estabelecidos (Fonseca et al., 2023b).

3. METODOLOGIA DO ESTUDO

Este estudo, de natureza qualitativa e interpretativa (Coutinho, 2011), foi realizado no segundo semestre de 2023. Tem por base uma experiência de ensino (Steffe & Thompson, 2000) constituida de uma sequência integrada de duas aulas hibridas, integrando a metodologia de sala de aula invertida, com o objetivo de promover a aprendizagem de estudantes do 8º ano (com idades entre 13 e 14 anos) de uma escola pública no Brasil sobre a fatoração algébrica. As aulas foram ministradas pelo segundo autor deste texto e os estudantes não possuiam conhecimentos prévios sobre a fatoração algébrica.

Cada aula híbrida considerou um processo cíclico de atividades instrucional, exploratória e avaliativa (Fonseca et al., 2023b). Na atividade instrucional, os estudantes responderam um quiz sobre fatorações algébricas, tendo eles que recorrer à visualização de vídeos explicativos sobre o assunto. Na atividade exploratória, os estudantes foram convidados a participar de um jogo didático, sempre interagindo com profesor-investigador para orientação e esclarecimentos de dúvidas. Por fim na atividade avaliativa, os estudantes resolveram um teste contendo quatro itens avaliativo que visavam consolidar as aprendizagens trabalhadas nas atividades anteriores.

Neste texto focamo-nos na primeira aula híbrida da experiencia de ensino que considerou os seguintes aspectos, referidos na literatura, como objetivos de aprendizagem de fatoração de expressão algébrica: (i) identificar termos comuns e termos quadráticos em expressões algébricas; (ii) associar uma expressão algébrica à sua forma fatorada e vice-versa; e (iii) aplicar técnicas de fatoração por agrupamento e por diferença de quadrados para simplificar expressões algébricas (Chevallard, 2023; Guadagnini et al., 2021, NCTM, 2000).

A recolha de dados compreendeu as três etapas de realização da aula híbrida. Incluiu a gravação em áudio e vídeo da aula dedicada à aplicação do jogo 'Par Perfeito', bem como as produções escritas e digitais dos estudantes durante a resolução das tarefas. A análise descritiva e interpretativa dos dados (Wolcott, 2009) foi realizada por meio da triangulação, com foco nos pensamentos algébricos evidenciados pelos estudantes sobre fatoração algébrica (Tabela 1).

Tabela 1. Categorias de análise do pensamento algébrico e respectivos descritores.

	DESCRIÇÃO
Representar	Representações usadas pelos estudantes para interpretar e/ou representar expressões algébricas no processo de sua fatoração
Raciocinar	Processos de raciocínios matemáticos usados pelos estudantes para fatorar expressões algébricas

Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

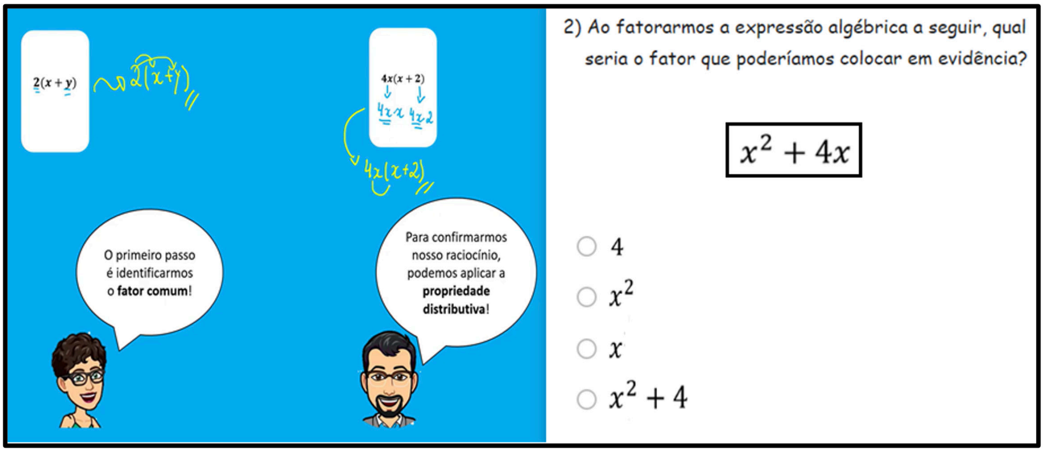
Para a análise, incluímos trechos dos trabalhos dos estudantes (nomes fictícios) e utilizamos as legendas Q_nA_k para identificar a atividade e a respectiva questão. Por exemplo, Q_2A_E representa a questão 2 da atividade exploratória.

4. A AULA HÍBRIDA DESENVOLVIDA

A aula híbrida que suporta este estudo considerou um processo cíclico de atividades instrucional, exploratória e avaliativa visando introduzir o estudo da fatoração algébrica. Implementada em novembro de 2023, essa aula híbrida seguiu três etapas:

1ª etapa: atividade instrucional – nesta etapa, os estudantes responderam a um quiz contendo quatro questões, de múltipla escolha, uma semana antes da aula presencial. Para responder às questões, era necessário assistir a vídeos explicativos sobre fatoração por agrupamento de termos algébricos, diferenças de quadrados e procedimentos de simplificação algébrica relacionados a esses tipos de fatoração (Figura 2)

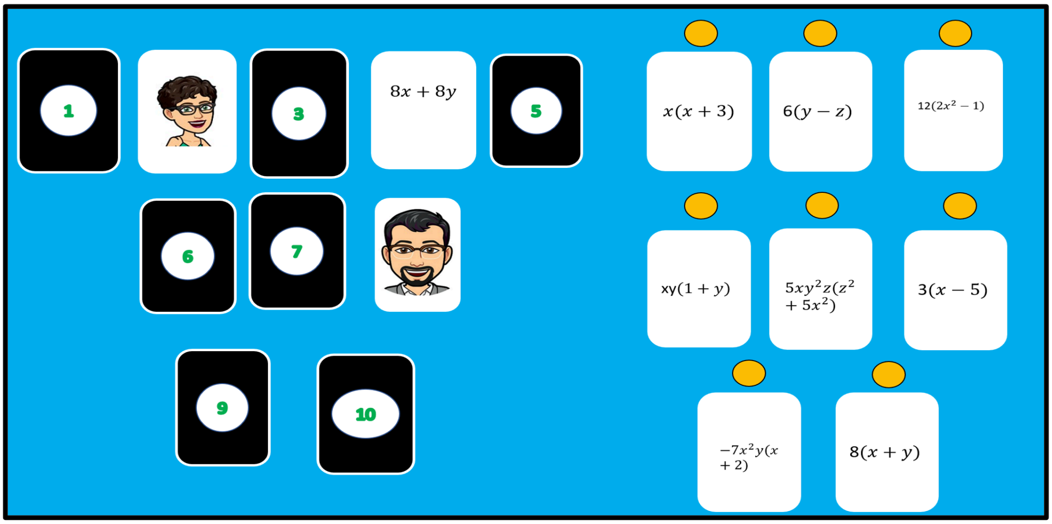
Figura 2. Ilustração do vídeo e questão do quiz da atividade instrucional.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

2ª etapa: atividade exploratória – nesta etapa, os estudantes participaram de uma aula com duração de 2h, durante a qual jogaram 'O Par Perfeito', um jogo didático semelhante a um jogo da memória. O jogo utilizou dois conjuntos de cartas: um com expressões algébricas não fatoradas e outro com suas formas fatoradas (Figura 3). Os estudantes, divididos em dois grupos, revezavam-se na escolha das cartas, devendo relacionar uma expressão não fatorada com sua forma fatorada (e vice-versa) para formar um "Par Perfeito" e registrar a resposta e justificativa da escolha na folha de tarefas.

Figura 3. Exemplo de uma das rodadas do jogo proposto na fase exploratória.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

O jogo foi estruturado em quatro rodadas: as duas primeiras focaram na fatoração por agrupamento; a terceira foi dedicada exclusivamente à fatoração de diferenças de quadrados; e a última combinou a fatoração por agrupamento com a de diferenças de quadrados, apresentando expressões como $8x^2 – 4y^2$. Cada resposta correta valia 10 pontos, e a equipe com o maior número de pontos foi a vencedora. O jogo também incluiu cartas especiais, “Darling” e “Vilmar”, que tornaram a atividade mais envolvente. A carta “Darling” permitia que a equipe jogasse duas vezes consecutivas, enquanto a carta “Vilmar” passava a vez de jogar para uma equipe adversária.

3ª etapa: atividade avaliativa – nesta etapa, os estudantes resolveram quatro itens avaliativos de múltipla escolha para verificar se os estudantes alcançaram as aprendizagens trabalhadas nas atividades anteriores.

5. RESULTADOS

Esta seção apresenta os resultados da análise dos dados focada nos pensamentos algébricos evidenciados pelos estudantes sobre fatoração algébrica. A análise começa com a fatoração por agrupamento e finaliza com a fatoração por diferença de quadrados. O pensamento algébrico foi analisado a partir de suas duas vertentes principais — representar e raciocinar — conforme discutido no referencial teórico.

5.1 FATORAÇÃO POR AGRUPAMENTOS

Na atividade instrucional, o pensamento algébrico dos estudantes sobre fatoração por agrupamento foi inicialmente identificado nas respostas às questões Q_1A_I e Q_2A_I, que se concentravam na identificação e representação algébrica do fator comum em expressões não fatoradas e foram analisadas com ênfase na vertente representar. O reconhecimento dos procedimentos envolvidos na fatoração por agrupamento foi analisado na questão Q_3A_1, com foco na vertente raciocinar, já que era necessário deduzir os procedimentos com base em inferencias.

Os resultados mostram que todos os nove estudantes conseguiram identificar a diferença entre a forma não fatorada e a forma fatorada de uma expressão algébrica (Q_1A_1), assim como o termo comum na expressão $x^2 + 4x$ (Q_2A_1). Além disso, eles foram capazes de assimilar a técnica de fatoração por agrupamento, que envolve a identificação e o agrupamento de termos que possuem fatores comuns. Todos obtiveram 100% de acerto nessas questões.

A esse respeito, destacamos que a visualização dos vídeos teve uma alta taxa de aproveitamento. Ressaltamos que os vídeos foram disponibilizados como 'não listados' no YouTube, sendo acessíveis apenas por meio de link compartilhado. Os nove estudantes assistiram a cada vídeo mais de uma vez, resultando em 29 visualizações do primeiro vídeo, 18 do segundo e 40 do terceiro. As seções que explicam o conceito de fator comum e o processo de decomposição de fatores em produto algébrico foram as mais visualizadas. Pode-se inferir que a frequência de visualizações dessas partes contribuiu significativamente para o bom desempenho dos estudantes na atividade instrucional, como confirmado pelos registros de visualização do segundo vídeo, que abordou o procedimento de fatoração por agrupamento (Figura 4).

Figura 4. Momentos de visualização do vídeo 2 da atividade instruccional.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

A partir do gráfico, é possível observar que a porcentagem de visualização manteve-se próxima a 40% durante a maioria do tempo de duração do video, apresentando pico de 56% no momento de 1:01, onde se explicava o processo de fatoração por agrupamento. Essa explicação envolvía a identificação de fatores comuns e a decomposição da expressão algébrica em um produto desses fatores. Esses dados sugerem que os estudantes estavam atentos a essa seção específica em busca de informações para responder à Q_2A_1.

Durante a atividade exploratória, a análise do pensamento algébrico dos estudantes focou na capacidade de interpretar registros algébricos (representar) e utilizar processos de raciocínio na fatoração de expressões (raciocinar). Os resultados mostram que a maioria dos estudantes (nove dos doze) conseguiu relacionar corretamente as cartas que continham expressões algébricas com suas respectivas formas fatoradas, por agrupamentos simples.

Os estudantes foram capazes de identificar fatores comuns na expressão algébrica e representar o produto algébrico que continha esses fatores. Eles forneceram explicações adequadas dos registros envolvidos, baseadas em processos de raciocínio, determinando corretamente a forma fatorada da expressão. Isso ficou evidente no diálogo entre Michael e o pesquisador, quando o estudante justificou sua escolha pela expressão fatorada $2(x + y)$.

Michael: Acho que é a carta $2(x + y)$...

Pesquisador: Por que você escolheu esta carta?

Michael: Porque 2 vezes x é $2x$ e 2 vezes y é $2y$.

Pesquisador: Então, nesse caso, quem seria o fator comum?

Michael: Seria o 2.

No diálogo, se observa que Michael comparou os termos $2x$ e $2y$, identificando o fator comum que deveria ser destacado da expressão e representa o produto $2(x + y)$. Para justificar sua conclusão, ele explicou: '2 vezes x é $2x$ e 2 vezes y é $2y$', sustentando sua escolha pela expressão fatorada $2(x + y)$ com base na aplicação da propriedade distributiva. Dessa forma, Michael utilizou de maneira adequada tanto a vertente representar quanto a de raciocinar (comparação e justificação) para associar corretamente a expressão algébrica à sua forma fatorada.

A fatoração de expressões que envolvia a aplicação, em duas etapas, da técnica de fatoração por agrupamento revelou-se um desafio para 10 dos 12 estudantes. Embora eles fossem capazes de identificar os fatores comuns nas expressões algébricas apresentadas, não conseguiram destacá-los das expressões e representar o produto algébrico que continha esses fatores, o que dificultou a generalização do processo de fatoração por agrupamento nessas expressões. Essa dificuldade é exemplificada no diálogo entre o pesquisador e a estudante Lucy.

Lucy: Acho que o par é $(x + 2y)$ $(y + 3)$ ...

Pesquisador: Por que esse seria o par? Como você fez?

Lucy: Porque essa opção apresenta x, y, 2 e 3 e 2 vezes 3 é 6 ...

Pesquisador: Mas como seria para fazer a fatoração por agrupamento?

Lucy: Não sei ...

O diálogo revela que Lucy associa a expressão $xy + 3x - 2y^2 - 6y$ com um produto algébrico que contém seus termos comuns, x, y, 2 e 3. Ela identifica semelhanças, como o produto dos fatores 2 x 3 com 6 (um dos termos da expressão), e conclui que a forma fatorada da expressão é $(x - 2y)(y + 3)$. No entanto, Lucy não conseguiu manipular os termos algébricos de maneira a agrupar os fatores comuns e generalizar a técnica de fatoração por agrupamento, o que a impediu de obter a forma simplificada da expressão algérbrica e de justificar sua conjectura. Isso revela uma fragilidade no processo de raciocínio de generalização para combinar, em duas etapas, a aplicação da técnica de fatoração por agrupamento em expressões algébricas.

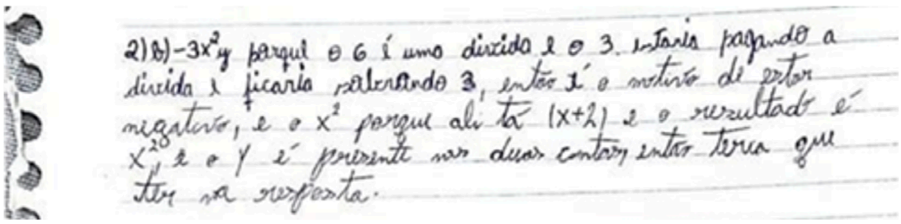
Neste momento, o professor utilizou o quadro para exemplificar diferentes tipos de expressões algébricas que deveriam ser fatoradas, combinando duas etapas da técnica de fatoração por agrupamento. Ele explicou passo a passo o procedimento correto para agrupar os fatores comuns das expressões e encontrar a forma fatorada. Após a explicação, alguns estudantes verbalizaram que haviam compreendido o processo e conseguiram identificar corretamente as expressões que poderiam ser fatoradas por essa técnica.

Na atividade avaliativa, os estudantes foram desafiados a fatorar uma expressão algébrica utilizando a técnica de agrupamento em uma etapa (Q_2A_A) e em duas etapas (Q_3A_A). Os resultados mostram que, na (Q_2A_A), todos os nove estudantes identificaram e representaram algebricamente o fator comum –3 x^2 y da expressão algébrica (vertente representar). Para justificar sua resposta, eles compararam ou classificaram os termos da expressão (vertente raciocinar), agrupando-os para extrair o produto algébrico da forma fatorada, tal como se verifica na resposta aprensentada por Michael (Figura 5).

Figura 5. Resposta do estudante Michael à .

$\boldsymbol{Q_2A_A}$: […] Qual seria a expressão algébrica que completaria a fatoração esquematizada no caderno? [a figura do caderno contém: $-3x^3y - 6x^2y = ???\,(x+2)$

a) $3x^2y$ b) $-3x^2y$ c) $3xy$ d) $-3xy$


2) b) $-3x^2y$ porque o 6 é uma divida e o 3 estaria pagando a divida e ficaria restando 3, então é o motivo de estar negativo, e o x^2 porque ali tá $(x+2)$ e o resultado é x^2, e o y é presente nas duas contas então teria que ter na resposta.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Michel representa corretamente o fator comum –3 x^2 da expressão –3 x^3y – 6 x^2y. Para justificar sua resposta, ele explica que o fator –3 é comum em ambos os termos, pois –6 pode ser decomposto em 2 x (–3). Ele reforçou essa decomposição ao afirmar que 6 representa uma ‘dívida’ (ou seja, –6), e o 3 estaria ‘pagando’ essa dívida, restando 3 [ou seja 2 x (–3)]. Comparando os termos da expressão, Michael identificou que x^2 é um fator comum, e, ao colocá-lo em evidência, obteve o termo x + 2. Ele também observou que o fator y também é comum em ambos os monômios.

Assim, ele concluiu corretamente que –3 x^2y é o fator comum da expressão algébrica e apresentou o produto –3 $x^2y(x$ + 2) da sua forma fatorada, revelando uma adequada capacidade de interpretar registros algébricos (vertente representar) e de usar processos de raciocínio (associação e comparação) para fatorar a expressão algébrica.

No entanto, oito dos nove estudantes não conseguiram aplicar, em duas etapas, o processo de fatoração por agrupamento para simplificar a expressão algébrica da Q_3A_A. Esses estudantes tiveram dificuldades em identificar os fatores comuns $3 - y$ ou $x^2 + 3$ e mobilizar processo de raciocínio de generalização para decompor a expressão algébrica em um produto desses fatores, tal como exemplificado na resposta de Maria (Figura 6).

Figura 6. Resposta da estudante Maria à.

$\boldsymbol{Q_3A_A}$: Em um jogo emocionante, um participante recebe um envelope contendo uma expressão algébrica $[-x^2y + 3x^2 - 3y + 9]$ e deve escolher, entre quatro cartas com produtos algébricos, aquela que apresenta a expressão fatorada correspondente. Qual das opções contém a forma fatorada da expressão algébrica presente no envelope recebido?

a) $3 - y)(x^2 + 3)$ b) $(y + 3)(x^2 + 3)$ c) $(3 - y)(x + 3)$ d) $(y + 3)(x + 3)$

3-b $-x^2y+3x^2-3y+9$

$3x^6y^6-3x^2y-3x^2y-6x^2$

$6xy$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Maria indicou de forma errada a alternativa *b*, que apresentava o produto $(3 + y)(x^2 + 3)$, como forma fatorada da expressão $-x^2y + 3x^2 - 3y + 9$. Ela evidencia ter identificado, incorretamente, como fatores comun o monômio '$6xy$' ao invés de x^2, ou 3. Além disso, Maria apresentou a expressão $3x^6y^6 - 3x^2y - 3x^2y - 6x^2$, que está desconexa da forma fatorada correta $(3 - y)(x^2 + 3)$. Essas dificuldades revelam fragilidade na manipulação dos termos algébricos, bem como na aplicação e generalização da técnica de fatoração por agrupamento, impedindo-a de obter a forma fatorada correta da expressão.

5.2 FATORAÇÃO POR DIFERENÇA DE QUADRADOS

Na atividade instrucional, a análise do pensamento algébrico dos estudantes sobre a fatoração por diferença de quadrados foi realizada com base nas respostas à questão Q_4A_I. Essa questão focou no reconhecimento dos procedimentos algébricos para esse tipo de fatoração, e foi analisada com ênfase na vertente raciocinar, já que era necessário a justificação correta dos procedimentos.

Os resultados mostram que sete dos nove estudantes identificaram corretamente que o procedimento para realizar a fatoração por diferença de quadrados consiste em extrair a raiz quadrada dos termos 'quadrados' da expressão algébrica e, em seguida, escrever o produto da soma pela diferença dessas raízes. Em contraste, dois estudantes apontaram um procedimento incorreto, a saber, calcular a soma e a diferença dos termos antes de extrair a raiz quadrada.

Além disso, o vídeo que apoiava a resolução dessa questão apresentou um alto índice de visualização, com 29 acessos registrados. As seções que explicam o conceito de diferença de quadrados e o processo de decomposição em produtos algébricos foram as mais assistidas.

Isso sugere que essas partes do vídeo contribuíram significativamente para o bom desempenho dos estudantes na resposta à questão, como pode ser observado na Figura 7, que mostra os registros de visualização no YouTube.

Figura 7. Momentos de visualização do vídeo 4 da atividade instrucional.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

A partir do gráfico, é possível observar que o percentual de visualização manteve-se em média próximo a 30% durante o vídeo, com um pico de 31% que se estabiliza entre 1:11 e 1:31, onde se explicava o processo de fatoração por diferença de quadrados. Essa explicação envolvia a identificação de termos quadrados, o procedimento para encontrar suas raízes quadradas, e a decomposição da expressão em um produto que inclui esses resultados. Esses dados sugerem que os estudantes estavam atentos a essa seção em busca de informações para responder à Q_4A_l.

Na atividade exploratória, a análise do pensamento algébrico dos estudantes considerou a capacidade deles de interpretar registros algébricos em expressões modeladas pela identidade $a^2 - b^2$, onde $a, b \in \mathcal{R}$ e mobilizar processos de raciocínios para fatorá-la. Os resultados mostraram que 10 dos 12 estudantes identificaram os termos quadráticos e representaram corretamente os resultados das raízes quadradas desses termos (vertente representar) e foram capazes de classificar a expressão algébrica como um caso particular da identidade $a^2 - b^2$. Eles aplicaram corretamente a regra de fatoração por diferença de quadrados para obter a forma fatorada da expressão, como o produto $(a + b)(a - b)$ (vertente raciocinar), conforme exemplificado no diálogo entre a estudante Lucy e o pesquisador sobre a fatoração de $y^2 - 16$.

Lucy: Acho que é a carta $(a + 4)(y - 4)$...

Pesquisador: Por que você escolheu essa carta?

Lucy: Porque essa carta apresenta y e 4.

Pesquisador: Apenas por isso? Consegue explicar melhor?

Lucy: Sim, é porque y vezes y é y^2 e 4 vezes 4 é 16.

O diálogo mostra que Lucy identificou corretamente os termos quadrados da expressão $y^2 - 16$, reconhecendo que y^2 é o quadrado de y e 16 é o quadrado de 4, como fica claro em sua explicação: 'porque y vezes y é y^2 e 4 vezes 4 é 16'. Ela também reconheceu a identidade algébrica da diferença de quadrados $a^2 - b^2$, para $a = y$ e $b = 4$. Embora tenha usado a expressão informal 'porque essa carta apresenta y e 4', isso não revela incompreensão dessa identidade. Por fim, Lucy associou corretamente a expressão $y^2 - 16$ ao produto $(y + 4)(y - 4)$, aplicando adequadamente a regra da fatoração por diferença de quadrados. Isso revela a capacidade de Lucy em mobilizar adequadamente tanto a vertente representar quanto a de raciocinar (classificação e justificação) ao fatorar expressões algébricas.

Na questão Q_4A_A da *Atividade Avaliativa*, solicitou-se aos estudantes que fatorassem $x^4 - 36$. Os resultados mostram que todos os nove estudantes que resolveram a questão apresentaram a fatoração correta, revelando terem sido capazes de identificar os termos quadráticos x^4 e 36 e representar corretamente os resultados de suas raízes quadradas x^2 e 6 (vertente representar). Além disso, foram capazes de classificar a expressão $x^4 - 36$ como um caso particular da identidade $a^2 - b^2$, aplicando corretamente a técnica de fatoração por diferença de quadrados para fatorar a expressão, conforme exemplificado na resposta de Michael (Figura 8).

Figura 8 Resposta do estudante Michael à.

$\boldsymbol{Q_4A_A}$: [...] Como uma forma de propor para seus alunos um desafio especial, o professor Vilmar solicitou que fosse fatorada a expressão algébrica $x^4 - 36$ presente na figura a seguir [figura está na tarefa], prometendo uma caixa de bombons àquele que respondesse corretamente. Qual seria a forma fatorada da expressão algébrica proposta?

a) $(x-6)(x+6)$ b) $(x+36)(x-36)$ c) $(x^2+6)(x^2-6)$ d) $(x^2+36)(x^2-36)$

4) c) $(x^2+6)\cdot(x^2-6)$ porque $x^2 \cdot x^2$ é x^4, $+\cdot-$ é $-$ e $6 \cdot 6$ é 36 por isso a resposta é x^4-36

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

6. CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

Este estudo analisa o pensamento algébrico evidenciados pelos estudantes em uma prática didática que integra a metodologia de sala de aula invertida, visando promover aprendizagem sobre fatoração algébrica por agrupamento e por diferença de quadrados. Os resultados obtidos fornecem resposta às questões de investigação

Em relação à primeira questão – 'Como os estudantes interpretam e/ou representam expressões algébricas fatoradas?' – os resultados mostram que os estudantes que demonstraram habilidade em interpretar expressões fatoradas, seja por agrupamento ou por diferença de quadrados, foram capazes de identificar corretamente os fatores comuns ou representar o valor algébrico das raízes quadradas dos termos quadráticos. Frequentemente, eles recorreram à aplicação da propriedade distributiva ou ao cálculo de potências para justificar suas conclusões, sem necessariamente destacar os fatores repetidos ou a extração da raiz quadrada. Essas ações associadas à vertente de 'representar' do pensamento algébrico foram essenciais para que os estudantes, em ambos os casos, conseguissem representar o produto algébrico correspondente à forma fatorada, confirmando conclusões apontadas por Blanton e Kaput (2005), Godino et al. (2012) e Chimoni et al. (2020) em seus estudos.

Em relação à segunda questão – 'Quais processos de raciocínio matemático são mobilizados pelos estudantes na fatoração de expressões algébricas?' – os resultados indicam que os processos de classificação, comparação e justificação foram os mais utilizados pelos estudantes que aplicaram corretamente as técnicas de fatoração por agrupamento ou por diferença de quadrados para fatorar as expressões. Inferimos que a fragilidade no processo de generalização da técnica de fatoração por agrupamento, como discutido também em Guadagnini e Dias (2022) e Chevallard (2023), contribuiu para que a maioria dos estudantes não conseguisse fatorar corretamente expressões cuja forma fatorada resulta no produto de dois binômios.

Os resultados indicam que, de modo geral, os estudantes demonstram uma capacidade adequada de mobilizar aspectos das vertentes representar e raciocinar do pensamento algébrico para: (i) identificar termos comuns e termos quadráticos em expressões algébricas; (ii) associar uma expressão algébrica à sua forma fatorada e vice-versa; e (iii) aplicar técnicas de fatoração por agrupamento e diferença de quadrados para simplificar expressões algébricas. Esses resultados são consistentes com o que se espera no estudo introdutório da fatoração algébrica tal como apontam Guadagnini e Dias (2022) e Ponte et al. (2009).

Embora os resultados não possam ser generalizados em função das características do contexto e dos participantes do estudo, consideramos que as vertentes do pensamento algébrico constituem ferramentas valiosas para a análise do pensamento algébrico dos estudantes. Acreditamos que as vertentes podem ser integradas às instruções didáticas que visam desenvolver o pensamento algébrico, uma vez que são essenciais para a compreensão de qualquer conceito algébrico, conforme apontam Ponte et al. (2009).

Os subsídios desta investigação indicam que a implementação de práticas didáticas para o ensino da Matemática, por meio da metodologia de sala de aula invertida, apoiada por um processo cíclico de atividades instrucional, exploratória e avaliativa, e que integre o uso de tecnologias digitais e jogos didáticos, pode favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico e criar um ambiente propício para reflexões e explicações sobre conceitos matemáticos. Esse impacto corrobora as ideias apresentadas por Bergmann e Sams (2012) e Lo et al. (2017), e é confirmado pela visualização dos vídeos da atividade instrucional, que contribuiu para a capacidade dos estudantes de representar e raciocinar sobre as técnicas de fatoração por agrupamento e diferença de quadrados. Além disso, na atividade exploratória, os estudantes tiveram a oportunidade de compartilhar e discutir seus conhecimentos, mobilizando seus raciocínios durante a tarefa, enquanto a atividade avaliativa proporcionou uma visão clara das aprendizagens e das dificuldades que ainda persistem entre eles.

No entanto, este estudo representa apenas um primeiro passo na compreensão das potencialidades dos elementos que descrevem e analisam o pensamento algébrico, bem como do impacto da sala de aula invertida na promoção desse pensamento. A maneira como o pensamento algébrico emerge e se desenvolve, e como a sala de aula invertida contribui nesse processo, demanda um aprofundamento nos recursos e estratégias didáticas que possam facilitar esse desenvolvimento.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

VGF e MCT conceberam a ideia apresentada, desenvolveram a teoría e adaptaram a metodologia para este contexto. VGF criou o modelo metodológico. MCT realizou as atividades e coletou os dados. VGF e MCT analisaram juntos os dados. Todos os autores participaram ativamente da discussão dos resultados, revisaram e aprovaram o trabalho.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DOS DADOS

Os dados que sustentam os resultados deste estudo estarão disponíveis com os autores correspondentes, VGF e MCT, mediante solicitação razoável.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao IFRJ, CAPES e FAPERJ pelo apoio financeiro no desenvolvimento desta pesquisa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bergmann, J., & Sams, A. (2012) *Flip Your Classroom*: *reach every student in every class every day*. Eugene, Oregon: ISTE.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2005) Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 412–446.

Bianchini, B., & Lima, G. (2021) A Álgebra e seu papel: reflexões a partir das produções do GT 04 da SBEM. *Bolema*, 35(70), 981 – 999. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a19

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: teoria e prática*. Coimbra: Almedina.

Chen, C. M., & Wu, C. H. (2015). Effects of different video lecture types on sustained attention, emotion, cognitive load, and learning performance. *Computers & Education*, 80, p. 108-121. http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2014.08.015

Chevallard, Y. (2023). El paso de la aritmética al álgebra en la enseñanza de las matemáticas en el Collège Segunda parte: Perspectivas curriculares: la noción de modelización. *Educ. Matem. Pesq.,* 25(1), 556-596. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p556-596

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020) The impact of two different types of instructional tasks on students' development of early algebraic thinking. *Journal for the Study of Education and Development*, 44(3), 1-50. https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1778280

Godino, J. D, Castro, W. F., Aké, L. P., & Wilhelmi, M. R. (2012) Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema*, 26(42), 483-511. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Guadagnini, M. R., Junior, V. B. S., Ignácio, R. S., & Dias, M. A. (2021). Factorización numérica y algebraica: ecología de un objeto protomatemático en función de la introducción de nuevas praxeologías desde 1960 hasta 2021 en la escuela primaria. *Educ. Matem. Pesq.,* 23(3), 281-313. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p281-313

Guadagnini, M. R., & Dias, M. A. (2022). Modelo Epistemológico de Referência para a Fatoração Implementado por meio de um Percurso de Estudo e Pesquisa no Ensino Fundamental. *Bolema,* 36(72), 286-307. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a13

Flipped Learning Network (FLN). (2014). *The Four Pillars of F-L-I-P™* . Disponível em: https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/. Acesso em: 6 set. 2024.

Fonseca, V. G., Arquieres, D. D., Pedro, V. S., & Borges, I. R. L. (2023a). Acción de futuro profesor de matemáticas en la implementación de una práctica didáctica, en un contexto de enseñanza remota de emergencia, sobre la ecuación exponencial. *Intersaberes*, *18,* E023tl4019.

Fonseca, V., Pereira, M., & Carvalho, E. (2023b) Ensino de sequência numérica: conhecimento didático evidenciado por futuros professores de Matemática na elaboração de aula híbrida, em abordagem de sala de aula invertida. XXXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Barcelos: Instituto Politécnico do Cávado e do Ave.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptualmodel ofmathematical reasoning for schoolmathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Lo, C. K., Hew, K. F., & Chen, G. (2017). Toward a set of design principles for mathematics flipped classrooms: A synthesis of research in mathematics education. *Educational Research Review*, 22, p. 50-73. http://dx.doi.org/10.1016/j.edurev.2017.08.002

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009). Álgebra no Ensino Básico. Lisboa, Ministério da Educação – DGIDC.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 1(12), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In. R. Lesh, & A. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education (267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Valente, J. A. (2014). Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. *Educar em Revista*, 4, 79-97. https://doi.org/10.1590/0104-4060.38645

Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.