Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 • N°. 1 • 2024
07-20
Recibido: 15/11/22024
Aprobado: 14/12/2024

Artículos de investigación

SOBRE LA INTERACCIÓN EPISTÉMICA Y EDUCATIVA ENTRE TRES REALIDADES: GEOMÉTRICA, FÍSICA Y ALGEBRAICA (GFA)

ON THE EPISTEMOLOGICAL INTERPLAY AMONG THREE REALITIES: THE GEOMETRIC, THE PHYSICAL AND THE ALGEBRAIC (GPA)

Luis Enrique Moreno-Armella[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5055-5782

Guershon Harel[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0004-3452-2031

RESUMEN

Nuestro interés por temas sobre la cognición y la epistemología nació de nuestras experiencias vividas en el aula como observadores del encuentro del alumno con las matemáticas. Nos interesa considerar dos categorías esenciales de la realidad: la realidad *matemática*, esta que se supone compartida por la comunidad matemática en general y, por otra parte, las realidades inferidas de las acciones de los estudiantes *por un observador*. Introducimos un modelo teórico, acompañado de episodios ilustrativos de una forma particular de pensar, a saber, la de inclinarse por la elaboración de *tres realidades matemáticas:* la geométrica (G), la física (F) y la algebraica (A). Esta forma de pensar está, en gran medida, ausente del razonamiento de los estudiantes. Aún más compleja es la construcción de una realidad *semántica* que coordine la relación entre las tres realidades previas. Los *entornos* en los que estas realidades pueden desarrollarse y madurar se denominan *organizaciones locales*. Allí, los estudiantes pueden empezar a descubrir el significado matemático de sus tareas y refinar gradualmente su entendimiento. Las organizaciones locales funcionan como versiones tempranas de formas de pensamiento en las que *la deducción* desempeña un papel central. Presentaremos ejemplos del Cálculo, de la cardinalidad de conjuntos infinitos y del álgebra lineal para ilustrar las manifestaciones pedagógicas del modelo GFA.

Palabras clave: realidad matemática, forma de pensar, organización local, deducción, realidad semántica.

ABSTRACT

Our interests in cognitive and epistemological issues were born from our lived experiences in the classroom as observers of the student's encounter with mathematics. We attend to two essential categories of reality: the *mathematical* reality, this assumed-to-be-shared among the mathematics community at large and the realities inferred from the

1 Departamento de Matematica Educativa, 07360 San pedro Zacatenco, Ciudad de México, Cinvestav-IPN. México. Correo electrónico: lmorenoa@cinvestav.mx

2 University of California San Diego, 9500 California, Estados Unidos de América. Correo electrónico: harel@math.ucsd.edu

students' actions *by an observer*. We offer a theoretical model accompanied with episodic illustrations of a particular way of thinking, that of the habit of constructing the three mathematical realities, the Geometric, the Physical and the Algebraic. This way of thinking is largely absent from students' repertoire of reasoning thus presenting an instructional challenge. Even more challenging is the construction of a suitable *Semantic* reality, that which coordinates the relationship among the three realities. The environments where these experiential realities can develop and mature are called local organizations, where students can begin to unveil the mathematical meaning of their tasks and gradually refine their understanding. Local organizations work as early versions of ways of thinking where deduction play a central role. Before concluding the paper, we offer examples from Calculus, cardinality of infinite sets, and linear algebra of the pedagogical manifestations of the GPA model.

Keywords: mathematical reality, way of thinking, local organization, deduction, semantic reality

1. INTRODUCCIÓN

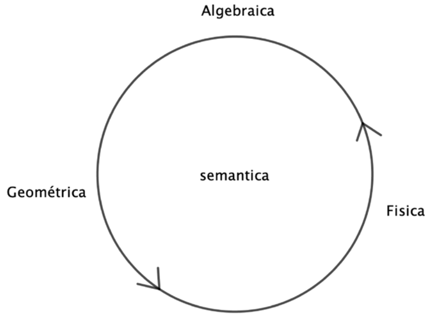
1. Introducción

Los educadores matemáticos exploran dos categorías esenciales de realidad: la realidad *matemática*, compartida por la comunidad matemática y las realidades inferidas ***por un observador*** a partir de las acciones de sus estudiantes. Es decir, una realidad que corresponde a cómo un profesor-investigador está interpretando las acciones matemáticas de los alumnos. Lo que se observa, es lo que Steffe y Thompson (2000, p.267) denominan *matemáticas de los alumnos*, que resultan de lo que dicen y hacen cuando participan en actividades matemáticas. En cierto sentido, estaremos viviendo en medio del pensamiento matemático de los alumnos y su posible formalización. Es decir, entre la cognición y la epistemología. Las matemáticas en general, y las de los alumnos en particular, constan de dos categorías de conocimiento: *Formas de entender* y *formas de pensar*.

Una forma de entender se refiere, por ejemplo, a cómo una persona *interpreta* una definición o el enunciado de un teorema. También a cómo *responde* a un problema planteado. Una forma de pensar, por su parte, se refiere a cómo una persona aborda la resolución de un problema interpretándolo desde un punto de vista *general* (por ejemplo, como un caso particular) o cómo un profesor toma decisiones sobre las matemáticas, en general, basadas en sus creencias sobre las matemáticas. Esto desde luego, podría afectar en consecuencia, su manera de enseñar y evaluar el rendimiento de sus alumnos. Las formas de pensar implican formas de razonamiento que *no son específicos* de una situación o contexto concretos, sino que son *trans-contextuales*.

En este trabajo ofrecemos un modelo de una forma particular de pensar que conduce a la construcción (y consideración simultánea) de tres realidades matemáticas: la realidad Geométrica, la realidad Física y la realidad Algebraica, asociadas a una idea matemática. Lo denominamos modelo GFA. Esta forma de pensar está, en gran medida, ausente de las formas de razonamiento de los alumnos, y supone un reto para la instrucción. Aún más compleja es la construcción de una *realidad semántica* que pueda coordinar las relaciones entre las tres realidades declaradas anteriormente. Elaboraremos este punto más adelante.

Figura 1. Descripción esquemática del modelo GFA.



Fuente: Elaboración propia.

2. LAS REALIDADES DEL MODELO GFA

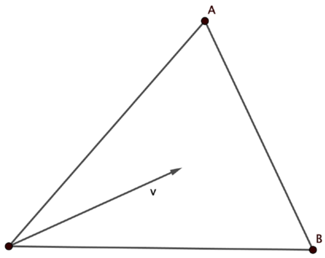
En términos generales, estas realidades pueden describirse someramente del siguiente modo: *Realidad geométrica:* representaciones gráficas y esquemáticas. *Realidad física*: fenómenos cuantitativos, por ejemplo, el movimiento, la variación y la acumulación. *Realidad algebraica:* representación algebraica, definición de límite, aproximación lineal, desarrollos de Taylor.

Explicaremos estas denominaciones mediante la discusión detallada de ejemplos en los contextos de la geometría axiomática, el cálculo, la cardinalidad y el álgebra lineal. Los *entornos* donde estas realidades pueden desarrollarse y madurar se denominan *organizaciones locales*. Es allí donde los estudiantes pueden empezar a descubrir el significado matemático de sus tareas y refinar gradualmente su comprensión. En cierto sentido, estas organizaciones locales funcionan como versiones tempranas de formas de pensamiento en las que *la deducción* desempeña un papel central.

2.1 Realidad geométrica

Se trata de saber *leer* las representaciones geométricas. Es fundamental que los alumnos puedan distinguir claramente entre el dibujo de un objeto geométrico y el objeto geométrico en sí. Es decir, entre la representación y la estructura. En general, ésta no es una tarea sencilla para los alumnos. Vamos a ilustrarlo con un ejemplo relevante.

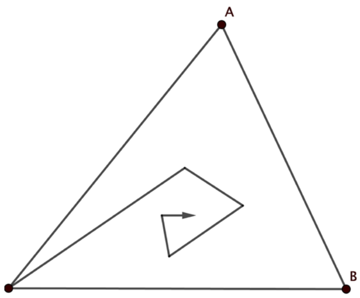
Figura 2. Descubrimiento de Pasch.



Fuente: Elaboración propia.

Los alumnos *comprenden* que, si prolongamos el segmento **v**, éste acabará intersecando al lado opuesto AB. Esta certeza tiene su origen en nuestra experiencia en el mundo material. Las figuras de la geometría elemental constituyen encarnaciones de actividades que se han llevado a cabo midiendo o cortando objetos materiales, por ejemplo. Las experiencias que vivimos en el mundo material tienen una importancia considerable sobre nuestras maneras de entender las propiedades de los dibujos sobre papel o pantalla. En verdad, los dibujos *heredan* el comportamiento de las experiencias corporales que representan. En otras palabras, del objeto matemático incrustado en el dibujo se *describe* su comportamiento. Pero esto no implica una *definición* de la *naturaleza* matemática del objeto. En la mente de los alumnos, empero, el dibujo y el objeto geométrico se identifican entre sí. Por eso nadie espera un comportamiento como el siguiente para la línea recta v:

Figura 3. Comportamiento Imposible.



Fuente: Elaboración propia.

Sin embargo, en un momento dado queremos que el conocimiento de los alumnos vaya más allá, de modo que el valor epistémico, arraigado en juicios basados en la percepción, evolucione hacia el valor lógico arraigado en esquemas de demostración deductivos y axiomáticos.

Lograrlo implica cruzar el puente que va de la comprensión sensorial-cognitiva a las formas matemáticas de pensar. Esto no se queda en un obstáculo *didáctico*, sino que apunta a la propia naturaleza de las matemáticas. La geometría euclidiana *supone* que el comportamiento de la recta v es éste: *al prolongar la recta, cortará al lado opuesto*. Pero este comportamiento que *no es un teorema euclidiano*, sino una suposición que se aceptaba sin mayor problema. Sin embargo, en 1882, Moritz Pasch descubrió que este hecho *no se deducía* de la axiomática euclidiana, cuyos objetos estaban siendo descritos de acuerdo a la experiencia sensorial. Es como si existiera una especie de *inconsciente cognitivo* que nos lleva a ocultar la diferencia necesaria entre describir y definir. Este inconsciente nos impide ver la *naturaleza epistémica* del caso. Ahí radica, nos parece, una raíz (hay otras) de un *obstáculo epistemológico*. La geometría de Euclides resulta únicamente de abstracciones empíricas y por eso sus objetos se describen a partir de este tipo de experiencia. Sin embargo, la axiomática moderna *define* los objetos matemáticos y, su comportamiento, se desprende de la estructura axiomática y no de los objetos materiales externos. Esta es una diferencia profunda con respecto a Euclides. Superar un obstáculo epistemológico no significa descartar lo construido, sino llevar las matemáticas a un nivel de abstracción y generalización que no era posible mientras se concebían como una reproducción simbólica del mundo de las experiencias externas. Ahora, las matemáticas han superado este *obstáculo euclidiano* ampliando y profundizando su realidad. Esta realidad ya no se limita a modelar el mundo exterior, sino a crear un sistema de orden superior que, a la vez que representa el mundo exterior, proporciona un medio para representar nuestras acciones en el mundo de lo abstracto. Los alumnos, por su parte, aceptan la proposición (la recta **v** intersecará al lado AB) de acuerdo con la perspectiva euclidiana. La experiencia nos ha demostrado que los alumnos suelen preguntar *por qué tenemos que demostrar o justificar algo que es tan obvio*. A los alumnos *no les gusta que se les obligue a demostrar proposiciones (especialmente obvias) mediante una cadena de pasos formales que recorren casi a ciegas*. Debemos reconocer que se trata de un problema ineludible en la enseñanza de las matemáticas, que requiere el desarrollo de una forma de pensar denominada esquema de demostración axiomática (Harel, G. & Sowder, L., 1998).

Veamos ahora un ejemplo en el que explicitamos el papel de las *organizaciones locales*.

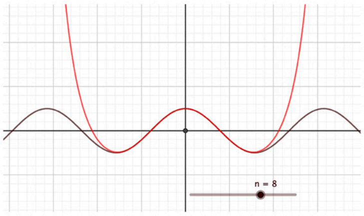
Pensemos en cómo convencer a alguien de que la distancia de la Tierra (E) al Sol (S) es mayor que la distancia de la Tierra a la Luna (M). Una respuesta plausible podría ser: espera a una noche en la que veas precisamente la mitad de la Luna iluminada. Esto significa que el triángulo EMS tiene un ángulo recto en el vértice M. Como el lado ES corresponde a la hipotenusa, debe ser mayor que el cateto EM. Es un razonamiento muy sencillo que se basa en que la hipotenusa es mayor que cada uno de los catetos. Una propiedad discutida previamente en el aula. Después, los alumnos pueden aceptar las afirmaciones sobre las distancias entre la Tierra y la Luna y entre el Sol y la Tierra, basándose en experiencias corporales. Proponer este tipo de ejemplos ayuda a entender que *aceptar una proposición como válida* es un instrumento para afirmar la validez de sus consecuencias. Es decir, se va formando un hábito deductivo coherente con el pensamiento euclidiano. Paso a paso se va creando un puente que conduce a las formas de pensar propias de la comunidad matemática.

Basándonos en nuestra experiencia, podemos sugerir el uso sistemático de organizaciones locales como medio para acercar el pensamiento de los alumnos al pensamiento matemático. Queremos hacer hincapié en que se puede recurrir a las organizaciones locales como artefacto de prueba. La geometría euclidiana implica tres de las cuatro realidades representadas en la figura 1: la realidad física tal y como se percibe a través de los sentidos -visual y táctil-; la realidad geométrica que se manifiesta en la idealización de esa realidad (por ejemplo, que un punto no tiene dimensión, que una línea solo tiene longitud, etc.) y la realidad semántica cuya tarea es coordinar entre estas realidades los procesos fundamentados en deducciones basadas en reglas lógicas predeterminadas. La coordinación por parte de la realidad semántica se manifiesta en la comprensión de que las figuras esbozadas en un papel son representaciones externas de una realidad física idealizada, no meras copias de percepciones visuales, y que el papel de tales esbozos se limita a mantener un flujo de pensamientos lógicos y, en caso necesario, ayudar a comunicar estos pensamientos a los demás. Los alumnos rara vez desarrollan la capacidad de razonar en términos de la trilogía de realidades. Consideramos que lograrlo es un imperativo educativo.

2.2 Realidad física

Representar funciones mediante polinomios de Taylor es un objetivo importante en Cálculo. De hecho, haciendo esto podemos calcular y representar gráficamente una aproximación de la función original. En cierto sentido, esto introduce una vía computacional especialmente cuando la función no es fácilmente manejable por los métodos habituales. Los polinomios de Taylor son, en el ámbito de las funciones, lo que las aproximaciones decimales son a los números reales. Para ayudar a los alumnos a comprender esta idea, podemos exponer casos que la hagan tangible. Consideremos, por ejemplo, la siguiente gráfica.

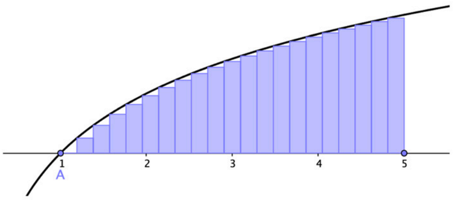
Figura 4. Aproximación de Taylor.



Fuente: Elaboración propia.

En esta gráfica los alumnos pueden observar y eventualmente *comprender*, la aproximación a f(x)=cos(x) mediante un polinomio. A medida que aumentamos el grado del polinomio podemos obtener mejores aproximaciones. Es posible adoptar una estrategia didáctica para estudiar la similitud entre las aproximaciones decimales y las aproximaciones de Taylor. Eventualmente, esto puede hacer tangible para los estudiantes que los procesos de aproximación con los que han trabajado en el pasado (incluyendo los actuales) son ejemplos de un proceso más general que los engloba como casos particulares. El concepto de límite surge a partir de estos ejemplos. Añadamos un ejemplo para estudiar el proceso de aproximación: la integración.

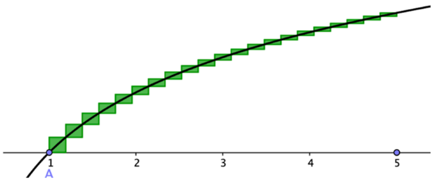
Figura 5. Aproximación por defecto.



Fuente: Elaboración propia.

Esta figura ilustra el proceso de aproximación del área bajo la curva. Se trata de una aproximación por *defecto*. Del mismo modo, tenemos una aproximación por exceso. Ambas pueden generar la aproximación con el grado de precisión deseado. La figura 6 ilustra una posible diferencia entre estas dos aproximaciones.

Figura 6. Diferencia entre aproximaciones.



Fuente: Elaboración propia.

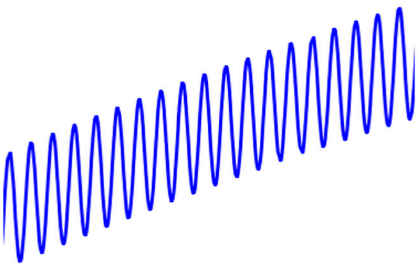
Muestra una característica importante: el gráfico puede ser cubierto por una familia de rectángulos *cuya suma de áreas puede hacerse tan pequeña como se desee*.

Esta última frase es el núcleo de la formalización de la idea de límite. Los estudiantes necesitan trabajar en una diversidad de contextos para adquirir una visión significativa de los límites, ya que se trata de un concepto con múltiples estratos (Moreno-Armella, 2021).

Existe un nivel de intuición que resulta de un esfuerzo sostenible de reflexión sobre una idea. Por ejemplo, el jugador de ajedrez desarrolla con el tiempo y esfuerzos sostenidos, una intuición del juego. El jugador observa una partida en curso y puede predecir el resultado. Tiene una forma de entender el ajedrez que es el resultado de mezclar su inteligencia analítica y su intuición. Podemos decir que, en consecuencia, el jugador tiene una profunda intuición para el ajedrez. Esto es posible para los estudiantes, pero a costa de un gran esfuerzo. La *repetición* es necesaria.

Las funciones pueden tener comportamientos inesperados. Introdujimos actividades para explorarlas con un microscopio, es decir, con la facilidad de Zoom de la geometría dinámica. Por ejemplo, se estudió la gráfica de $g(x) = \text{sen}(x) + 0.2\ \text{sen}(100x)$. La frecuencia de $\text{sen}(100x)$ es alta. Sólo haciendo zoom en la gráfica pudieron los alumnos descubrir lo que estaba oculto:

Figura 7. Comportamiento oculto.

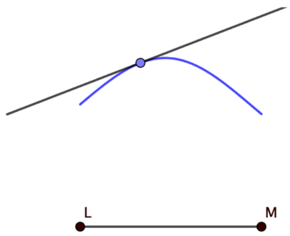


Fuente: Elaboración propia.

2.3 La realidad algebraica

El objeto matemático no está disociado de las intervenciones operativas que son posibles con y sobre él. Inicialmente, los objetos, o más bien los objetos en construcción, y las situaciones en las que aparecen, no están claramente identificados: el *objeto-fragmento* aparece dentro de una red conceptual que posee un campo operativo con el que podemos operar sobre él e iniciar así su exploración. A medida que los alumnos progresan podemos ver cómo su comprensión se traduce en la formación de núcleos conceptuales y cómo su actividad se desarrolla en torno a estos núcleos a través de sus campos operatorios.

Figura 8. Recta Tangente.



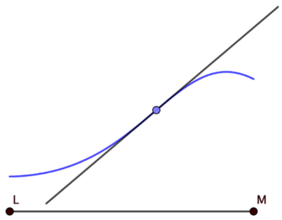
Fuente: Elaboración propia.

Cuando trazamos rectas tangentes para funciones convexas, el campo operativo (con un cierto nivel de formalización) nos permite escribir como hemos aprendido en estos casos:

(f(a+h)-f(a))/h.

No hay dificultades en estos casos. Sin embargo, surge un problema cuando intentamos trazar la tangente en un punto de inflexión.

Figura 9. Punto de inflexión.



Fuente: Elaboración propia.

Allí, el campo operativo indica que la tangente es una recta que *cruza* la curva, pero el concepto de recta tangente, derivado de las tangentes para curvas convexas, como es la experiencia de la mayoría de los estudiantes, se opone a tal generalización.

Entonces, nos vemos obligados a modificar nuestra idea de la noción de recta tangente para hacerla encajar en las nuevas situaciones reveladas por el campo operacional. El concepto original adquiere un nivel superior de organización y generalización, y amplía el contexto anterior del que surgió. El concepto se construye cristalizando las acciones reveladas por el campo operativo.

Desde un punto de vista didáctico, es revelador el momento en que un *concepto intuitivo* (que previamente ha servido de motivación para la comprensión), se convierte en un concepto *definido* por un nuevo conjunto de actividades. En estos momentos, observamos que la intuición se va a poner al servicio de una formalización incipiente. Aprender implica conectar ideas -sinapsis de ideas- y descubrir las estructuras ocultas que, a distintos niveles, sustentan esas ideas. Esto es crucial para una enseñanza con sentido, es decir, cómo se puede explicar un concepto matemático desde distintos niveles de complejidad sin olvidar que el oyente es un alumno. Para enseñar matemáticas hay que entender a *quién* se va a enseñar. En efecto, no podemos dejar toda la complejidad conceptual en manos de los alumnos. Enseñamos para el futuro (véase Moreno-Armella, 2021).

El primer conocimiento es el conocimiento contextual. Se pueden esgrimir razones para permanecer en este nivel pero, inevitablemente, tendremos que conquistar el conocimiento estructural. El conocimiento estructural contempla simultáneamente una gran diversidad de contextos. Encontramos una similitud con el lenguaje cuando decimos que las palabras no pueden quedar aprisionadas por un único significado. La savia del conocimiento es el sentido. Esto explica por qué los modos de comprensión se subsumen en la realidad semántica. El paso de los modos de comprensión a los modos de pensar no es unidireccional. Los conceptos emergen como cristalizaciones de la diversidad de acciones realizadas y realizables en cada versión contextualizada del concepto en formación. Existe una riqueza de significados que orientan el campo operativo formal del concepto y despiertan formas de comprensión en un nivel superior.

2.4 Realidad semántica: una introducción

El mundo humano no está hecho sólo de objetos materiales. En ese mundo existe la amistad, la educación, el tribunal supremo de justicia. Y ninguna de estas «cosas» tiene peso, volumen o temperatura. Están hechas de *sustancia simbólica*. Un símbolo, es cualquier cosa que ocupa el lugar de otra que (posiblemente) está ausente. Por ejemplo, una incisión en un hueso no es un conejo, pero puede ocupar el lugar del conejo para el cazador. La capacidad simbólica tiene una larga y fascinante historia (Donald, M. 2001; Moreno-Armella & Santos-Trigo, 2016). El propio cuerpo ha sido nuestro espacio de representación primigenio. Gestos faciales, miradas, sonidos guturales y finalmente la lengua en todo su esplendor.

El impacto de la escritura ha sido enorme. Primero proporcionó un soporte externo a la memoria y pronto se convirtió en un espacio cognitivo. Cada vez que leemos nuestros propios escritos, reorganizamos nuestras ideas y las refinamos: es un proceso que recuerda al trabajo de un escultor. La irrupción de la escritura en el universo griego, por ejemplo, transformó su cultura de raíz.

Nuestra capacidad de predicción tiene su origen y necesidad en el movimiento (R. Llinás, 2001, MIT). Eso explicaría la sensibilidad a todo lo que se mueve. Un depredador en estado de absoluta quietud está alerta a cualquier movimiento que pueda percibir en su entorno. Las consecuencias de la consciencia del movimiento en los seres humanos han sido tan profundas, que gran parte de los esfuerzos matemáticos durante siglos han consistido en redescribir el movimiento y el cambio en términos simbólicos. Uno de los resultados más profundos ha sido el desarrollo de las matemáticas de la variación y la acumulación cuya versión clásica, el cálculo infinitesimal, se convirtió en uno de los recursos predictivos centrales de las ciencias físicas.

3. MANIFESTACIONES PEDAGÓGICAS DEL MODELO GFA

La actividad *El infinito en el espejo* (véase Tabares, L. &Moreno-Armella, L. &Miranda, I., 2023) forma parte de una secuencia de actividades cuyo propósito es hacer conscientes a los estudiantes de la tensión existente entre la concepción intuitiva del infinito y su formalización matemática. Esta actividad se desarrolló con estudiantes de primer año de matemáticas aplicadas en una universidad mexicana. El dispositivo diseñado para la actividad consistió en dos espejos del mismo tamaño, colocados uno frente al otro. Primero se colocó una pelota entre los espejos. Los alumnos podían ver los reflejos de la pelota en los espejos. Después, colocamos tres pelotas (los alumnos no veían mientras colocábamos las pelotas). Los alumnos tenían que mirar los reflejos en ambos espejos y determinar cuántas bolas podían contar. Al cabo de un rato, el profesor preguntaba a los alumnos el número de bolas que habían visto. Las respuestas debían pronunciarse en voz alta y con el objetivo de que todos los alumnos pudieran reflexionar sobre lo que contestaban sus compañeros. Uno de ellos, Omar, reflexionando sobre los reflejos de las bolas, dijo finalmente: *"los infinitos tienen diferentes tamaños; y eso depende, si es uno [se refiere a una bola] entonces será más pequeño que un infinito de tres [bolas],* ***pero al mismo tiempo*** *no puede ser más grande, porque podemos contar ambos conjuntos de reflejos (los de una y tres pelotas) con los números naturales así que siguen perteneciendo al mismo infinito"*. En esta afirmación, Omar especifica claramente que su intuición le hace pensar que habría dos infinitos de distinto tamaño: el que se forma con los reflejos de una sola bola y el del reflejo de tres bolas. Para Omar, el primer infinito está formado por múltiplos de uno; el segundo, por múltiplos de tres. Le parece que estos infinitos tienen tamaños diferentes. Reconociendo que en ambos casos el número de bolas se cuenta con los números naturales, su intuición se ve frenada por sus conocimientos matemáticos formales. Esto le lleva a concluir que deben ser infinitos del mismo tamaño. Continúa con su reflexión en voz alta, estableciendo así una diferencia entre conocimiento intuitivo y conocimiento formal; entre formas de entender y formas de pensar. Omar expresó: «*pero si le metemos matemáticas*», recurriendo a su educación matemática, *es el mismo infinito*.

Esto dejó claro que su razonamiento le llevaba a concluir la igualdad de los dos infinitos. Más adelante en la sesión, dijo que hay infinitos más grandes, como el infinito de los números reales. Cuando le preguntamos por qué, respondió: *porque hay números irracionales como π y fracciones como 1/4 que se «disparan al infinito». Por eso es un infinito mayor. Porque son como muchos infinitos combinados en uno; entonces es más grande que un solo infinito de una sola cosa: los números naturales*. Omar explicó que *el infinito está incrustado en cada número real*. Pero no acabó aquí. Afirmó que como cada número irracional tiene su propio infinito, el conjunto de los números irracionales tiene un infinito mayor que el infinito de los números naturales. Su razonamiento se basa en que entiende que *la parte fraccionaria no periódica de un número irracional lo hace inidentificable*, al contrario de lo que ocurre con los números naturales. De este modo, las formas de entender de Alfredo implican que los números naturales están *asociados a un único infinito*, más pequeño que el infinito de los números irracionales. *Son como muchos infinitos combinados en uno solo*, decía. Omar obtiene la certeza a partir de su educación matemática formal. Su argumento, se basa en la intuición y también en el conocimiento formal.

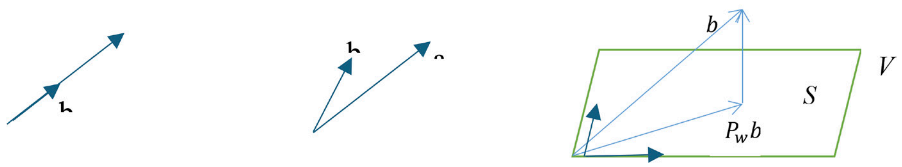
El punto intermedio entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento formal se desarrolla durante su reflexión: si *pones más bolas, el infinito es mayor, pero si metes matemáticas, pues no*.

De hecho, no es un término medio, sino una espiral. O una *cognición de Moebius*...Pero Omar no estaba contento con el resultado: *Sigo en conflicto pensando que la teoría puede funcionar.* Su comprensión, a pesar de todo, está en desacuerdo con la conclusión forzada por el pensamiento formal... *una tensión viva entre formas de comprender y formas de pensar.*

Álgebra lineal.

Se ha comprobado que los estudiantes se benefician de las ilustraciones geométricas de los conceptos de álgebra lineal recién introducidos. En términos del modelo GFA, estos resultados sugieren que invocar las realidades geométricas de los estudiantes junto con las realidades algebraicas recién aprendidas puede promover la comprensión. Sin embargo, también se ha demostrado que los estudiantes tienden a fusionar estas dos realidades en una realidad híbrida que restringe su capacidad para seguir desarrollando ideas abstractas de álgebra lineal. Consideremos la siguiente observación realizada en clases de álgebra lineal. Las dos figuras de la izquierda se introducen para ilustrar el concepto de dependencia lineal e independencia lineal (en y). La figura de la derecha se introduce para ilustrar el concepto de proyección ortogonal sobre un subespacio. En general, los paralelogramos se introducen como esbozos metafóricos de subespacios.

Figura 10. Independencia lineal y subespacios.



Fuente: Elaboración propia.

Mientras que las dos figuras de la izquierda pueden considerarse representaciones de objetos geométricos -segmentos de línea dirigidos-, la figura de la derecha no es más que un esbozo metafórico, ya que un paralelogramo no es un subespacio. Se observó que la comprensión de los alumnos de la dependencia y la independencia lineales quedaba confinada dentro de las imágenes asociadas a estas figuras. En términos de Vinner, la definición conceptual de los alumnos se hace congruente con su imagen conceptual basada en la figuración. Del mismo modo, aunque la tercera figura pretende ilustrar la definición conceptual de proyección ortogonal, los alumnos entienden que la figura *es* la definición conceptual. En una reciente discusión en clase sobre un problema de proyección ortogonal sobre un plano dado (como en la figura), el profesor marcó una base, en (que aparece como flechas en la esquina inferior izquierda del paralelogramo), a lo que un alumno comentó «... pero no es un subespacio, ya que negativo no está en V», una respuesta que demuestra la dificultad de este alumno para ver los bocetos metafóricos como se pretendía.

Cálculo.

La enseñanza del cálculo es un caso destacado que ilustra la falta de atención a las tres modalidades del GFA. Normalmente, la presentación de contenidos en las clases de cálculo se organiza en torno a tres fases -una fase de exposición *preformal*, una *fase de exposición formal* y una *fase de exposición postformal* –en las que las dos primeras fases suelen ser breves, mientras que la tercera fase, que consiste principalmente en ejemplos que ilustran el concepto y los procedimientos para su aplicación, ocupa la mayor parte de la clase. Las observaciones realizadas en clase revelan que la fase de exposición preformal suele estar desprovista de un intento aparente de exigir intelectualmente que el concepto se aprenda a través de situaciones problemáticas basadas en una de las realidades del GFA. Más bien, el concepto suele presentarse como un producto prefabricado. Cuando se menciona la covariación cuantitativa, se hace como una ocurrencia tardía al final de la *presentación postformal,* después de los tratamientos algebraicos. Del mismo modo, rara vez los libros de texto incluyen en la fase preformal problemas físicos que impliquen la covariación cuantitativa para suscitar la necesidad de aprender los conceptos. Tales problemas suelen aparecer en la última parte de la fase de enunciado postformal. En total, las tres fases no atienden a realidades físicas, abordando el contexto de las cantidades covariantes, la tasa de cambio, la acumulación, etc. Más bien, sus se centran casi exclusivamente en la realidad algebraica, acompañada ocasionalmente de ilustraciones gráficas que manifiestan la modalidad geométrica. Aunque los libros de texto prestan atención a las tres modalidades de *representación*-algebraica, *gráfica* y *física*-, prestan mucha más atención a las dos primeras que a la tercera.

Para ilustrar un enfoque didáctico alternativo, en el que intervienen las tres realidades del GFA coordinadas por la realidad semántica, consideremos la estructura de una lección sobre *la derivada direccional* y su relación con *el gradiente,* tal como se implementó en una clase de cálculo multivariable de licenciatura. La lección se organizó en cuatro fases:

Fase 1. En esta fase, los estudiantes repiten su experiencia sobre el movimiento de un objeto en una dirección determinada, representada gráfica y literalmente por un vector unitario. El movimiento en un punto implica una sensación física, expresada simultáneamente a través de su representación algebraica (posición frente a tiempo) y gráfica como una curva marcada en el plano que pasa por y ortogonal al plano

Fase 2. La sensación física invoca necesariamente la tasa de cambio (es decir, la velocidad). Como tal, tiene tanto una representación gráfica, como la pendiente de la recta tangente a la curva en y una expresión algebraica de la pendiente como *límite de un cociente de diferencias*, indicado como.

Fase 3. A través del cálculo de mediante el límite de su correspondiente cociente de diferencias, surge la necesidad de saber si se puede desarrollar una fórmula para el valor de. Con la ayuda del profesor la clase obtiene la fórmula, y con ella nace el concepto de *pendiente*.

Fase 4. La fórmula recién obtenida conduce a la producción de una nueva relación, que a su vez plantea preguntas sobre sus implicaciones físicas. La discusión de esta cuestión conduce a un nuevo conocimiento significativo; a saber, la maximización/minimización de la tasa de cambio.

Vemos aquí cómo cada fase implica simultáneamente las tres realidades: la realidad geométrica, la realidad física y la realidad algebraica. La invocación de las tres realidades y especialmente sus interrelaciones están coordinadas y controladas por la realidad semántica instanciada a través del bagaje matemático de los alumnos, las sensaciones físicas corporales, la idealización de estas experiencias y la necesidad intelectual. Las más destacadas de estas necesidades en esta lección son dos: (a) la necesidad de cálculo, expresada a través de la necesidad de obtener una forma fácilmente computable para y la necesidad de obtener las direcciones que maximizan o minimizan la tasa de cambio; (b) la necesidad de certeza, por ejemplo, la necesidad de dar cuenta de la validez de la forma fácilmente computable. Estas necesidades, cabe destacar, provienen de primitivas cognitivas y sociales (véase Harel, 2013). Por ejemplo, implican la necesidad de utilidad de las causas sociales (por ejemplo, minimizar el esfuerzo y el coste y maximizar el beneficio).

4. REFLEXIONES FINALES

La tensión entre el razonamiento intuitivo e informal y el llamado razonamiento riguroso y formal plantea enormes desafíos a la educación matemática. Uno de los retos más persistentes consiste en clasificar el razonamiento intuitivo como provisional, carente de validez, y tomar partido por el razonamiento lógico como vía de acceso al *auténtico* conocimiento matemático. Esta postura no es la mejor desde el punto de vista educativo.

En la raíz de este movimiento percibimos las concepciones holística y analítica del pensamiento humano. Esto nos llevará a una consideración fundamental: las profundas relaciones entre cognición y epistemología, entre semántica y sintaxis, ya que transformamos nuestras experiencias en modelos simbólicos y conservamos algo más que matices de significado de estas experiencias encarnadas.

Vemos diversidad y respondemos con números; vemos formas y respondemos con geometría. Vemos variación y acumulación y respondemos con cálculo. Somos como un *organismo de Moebius*: *Aprendemos con el cuerpo*. Y *aprendemos con los símbolos*. Es decir, aprendemos con nuestro organismo cognitivo híbrido. Los niños pueden distinguir cuatro caramelos de siete, aunque todavía no sepan contar. Años más tarde, sin embargo, pueden factorizar números de tres cifras y, finalmente, demostrar el teorema fundamental de la aritmética.

En el aula, el alumno se enfrenta a fragmentos de conocimiento que debe decodificar. Esto implica la elaboración de significados. Ahora bien, el conocimiento matemático lleva consigo un campo semántico y una intencionalidad que han ido evolucionando con su propia historia. Al principio, esto no es visible a los ojos de los alumnos. Observamos con ilusión cómo los alumnos despliegan sus capacidades cognitivas para comprender, para interpretar una pregunta y responderla. Este es un camino hacia una forma matemática de pensar. La cultura matemática otorga niveles de valor epistemológico a estas actividades. A través del razonamiento repetido, estas formas de comprensión conducen a formas de pensamiento que cohesionan con el conocimiento matemático establecido. Se trata de un puente entre la cognición y la epistemología.

En la misma línea, H. Weyl (1932) explica que: «No nos sentimos muy satisfechos cuando nos vemos obligados a aceptar una verdad matemática en virtud de una complicada cadena de conclusiones y cálculos formales, que recorremos a ciegas, eslabón a eslabón, tanteando el camino con el tacto. Queremos primero una visión general del objetivo y del camino; queremos entender la idea de la prueba, el contexto más profundo».

Educar en matemáticas resulta de la articulación entre formas de entender y formas de pensar. Intuición y rigor en un viaje interminable.

5. REFERENCIAS

Donald, M. (2001). *A Mind so Rare: The evolution of human consciousness*. New York, Norton.

Harel, G. 2013. Intellectual Need. In *Vital Direction for Mathematics Education Research*, Leatham, K. Ed. (pp 119-151). Springer.

Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, with reference to teacher´s knowledge base. *ZDM Mathematics Education 40, 893-907*.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students´ Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. *CBMS Issues in Mathematics Education 7, 234-283*.

Llinás, R, (2001). *I of the Vortex*, Cambridge, MIT Press.

Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM-Mathematics Education* 53, 621-633.

Moreno-Armella, L & Santos-Trigo, M. (2016). The Use of Digital Technology in Mathematical Practices: Reconciling Traditional and Emerging Approaches. *Handbook of International Research in Mathematics Education* (L. D. English and D. Kirshner, eds), 595-616.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tabares, L. &Moreno-Armella, L. &Miranda, I. (2023). El infinito en el espejo. *Conference on Innovation, Documentation, Education and Teaching Technologies*: Innodoct.

Weyl, H. (1932). Unterrichtsblatter fur Mathematik und Naturwissenschaften, 38, 177-188 (1932). (Translation by Abe Shenitzer in The American Mathematical Monthly, v. 102, no. 7 (August-September 1995), p. 646.