Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 18 • N°. 1 • 2025
21-42
Recibido: 19/11/2024
Aprobado: 06/01/2024

Artículos de investigación

HÁBITOS DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y EL USO DE GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

MATHEMATICAL THINKING HABITS AND THE USE OF GEOGEBRA IN SOLVING AND FORMULATING OPTIMISATION PROBLEMS

Martha L. García-Rodríguez[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2435-1334

Juan Gabriel Herrera-Alva[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1916-0587

RESUMEN

El presente trabajo tuvo como objetivo analizar los hábitos de pensamiento matemático que los estudiantes desarrollan cuando trabajan en la resolución y propuesta de problemas de optimización en un entorno de geometría dinámica. Se asume la resolución y formulación de problemas matemáticos como una ruta de pensamiento en la que el estudiante muestra hábitos, recursos, estrategias y una disposición para comprender ideas y conceptos. Actualmente, la investigación sobre los procesos de resolución y formulación de problemas incorpora el uso de tecnologías digitales; por ello, es interesante conocer las actividades matemáticas derivadas del uso de dichas tecnologías. Se analizó el proceso de resolución y formulación de problemas llevado a cabo por seis estudiantes inscritos en un curso de cálculo en el primer semestre de una carrera de ciencias, considerando cuatro fases: orientación, conexión, generación y reflexión. Los datos mostraron los hábitos de pensamiento matemático que emergieron durante la resolución y formulación de problemas. El principio de problematización contribuyó al desarrollo de hábitos como analizar un problema desde diferentes enfoques y formular conjeturas. Las evidencias recabadas mediante los protocolos de construcción en GeoGebra permitieron identificar actividades matemáticas relacionadas con el uso de la tecnología, como descubrir relaciones, probar y verificar conjeturas, reemplazar cálculos extensos por otros realizados con tecnologías digitales y confirmar resultados obtenidos analíticamente.

Palabras clave: Tecnologías digitales, recursos matemáticos, trayectorias de aprendizaje.

ABSTRACT

The objective of this work was to analyze the mathematical thinking habits that students develop when they work on solving and proposing optimization problems in a dynamic geometry environment. The resolution and formulation of mathematical problems is assumed as a route of thought in which the student shows habits, resources, strategies and a disposition to understand ideas and concepts. Currently, research on problem solving and formulation process-

1 CICATA Legaria, Instituto Politécnico Nacional, México. Correo electrónico: mlgarcia@ipn.mx.

2 Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Correo electrónico: gabalva@ciencias.unam.mx.

es incorporates the use of digital technologies; therefore, it is interesting to know the mathematical activities derived from the use of these technologies. The process of problem solving and formulation carried out by six students enrolled in a calculus course in the first semester of a science degree program was analyzed, considering four phases: orientation, connection, generation and reflection. The data showed the mathematical thinking habits that emerged during problem solving and formulation. The principle of problematization contributed to the development of habits such as analyzing a problem from different approaches and formulating conjectures. The evidence collected through the construction protocols in GeoGebra made it possible to identify mathematical activities related to the use of technology, such as discovering relationships, testing and verifying conjectures, replacing extensive calculations with others performed with digital technologies, and confirming results obtained analytically.

Keywords: Digital technologies, mathematical resources, learning trajectories.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación en resolución de problemas ha tenido diferentes orientaciones, como se puede constatar en revisiones sobre este tema publicadas desde hace décadas.

Schoenfeld (1992) identifica un consenso sobre la importancia del método de indagación para el pensamiento matemático y la resolución de problemas, así como un acuerdo en cinco aspectos de la cognición que influyen en la resolución de problemas: el conocimiento base, las heurísticas, el monitoreo y control, las creencias y afectos, y las prácticas. Lester (1994) encontró en la década de los ochenta un interés por los problemas variables: en contenido y contexto, en estructura, en sintaxis y en heurísticas para resolver los problemas; distinciones entre resolutores expertos y novatos, diseño de instrucción vía la resolución de problemas y el estudio de la metacognición. Koichu (2014) señala que la resolución y formulación de problemas, que incluyen la conjetura y la prueba, son actividades esenciales en la matemática, por lo que se espera que también lo sean en la educación matemática. Afirma que, a partir de secuencias de preguntas en las clases de matemáticas, es posible brindar experiencias de resolución de problemas similares a las de los matemáticos, y estas experiencias benefician y promueven la comprensión de conceptos en los estudiantes. Sidenvall (2019) realizó una revisión de literatura en siete revistas indexadas publicadas entre 2000 y 2016 para caracterizar los diseños de enseñanza orientados para favorecer habilidades de resolución de problemas y razonamiento en los estudiantes. El autor identificó cuatro herramientas teóricas utilizadas para este fin: trayectorias hipotéticas de aprendizaje, educación matemática realista, teoría de situaciones didácticas y zona de desarrollo próximo. Por su parte, Santos-Trigo (2024) llevó a cabo una revisión de artículos publicados en revistas indexadas y libros recientes sobre resolución de problemas matemáticos, así como de publicaciones de investigadores reconocidos en el campo, su objetivo fue identificar las tendencias y direcciones de la investigación reciente en resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Reconoce a la formulación de problemas matemáticos y su resolución como actividades que organizan las propuestas curriculares y los entornos de aprendizaje de las matemáticas, en donde el uso de tecnologías digitales tiene un papel principal en las formas de plantear y abordar los problemas debido al tipo de representaciones, la exploración y el razonamiento que con ellas logran los estudiantes durante los procesos de resolución.

Santos-Trigo (2024) menciona que cuando se asume un entorno de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basado en la resolución de problemas, implícitamente se considera que la disciplina contribuye al desarrollo de las prácticas matemáticas en los estudiantes o hábitos de razonamiento matemático. En este enfoque, los estudiantes deben conceptualizar y percibir su propio aprendizaje como un conjunto de dilemas que son representados, explorados y resueltos a partir de recursos matemáticos y de estrategias, esto se conoce como principio de problematización. Las experiencias de los estudiantes durante la resolución de los problemas reflejan una forma de pensar que se manifiesta en las actividades que realizan a lo largo de todas las fases de resolución de los problemas. El mismo autor señala que, de esta forma es posible desarrollar hábitos matemáticos como buscar diferentes maneras de modelar y explorar los problemas, formular conjeturas, buscar argumentos para sustentarlas, compartir soluciones, defender sus ideas y desarrollar un lenguaje adecuado para comunicar sus resultados.

Recientemente Santos-Trigo (2023) menciona que el uso de tecnologías digitales en el aula de matemáticas ha abierto nuevas líneas de investigación en las que se analiza, entre otros temas, sobre el razonamiento y procesos de resolución de problemas. Autores como Koichu (2014) y Santos-Trigo, (2023) señalan que la investigación en resolución de problemas ha entrado en un nuevo ciclo de desarrollo, para dar respuestas nuevas a viejos problemas, sobre todo cuando se utilizan tecnologías digitales, que a decir de Santos-Trigo, brindan nuevas formas de trabajar en la resolución de problemas matemáticos y de recopilar y analizar información durante los procesos de resolución.

De las investigaciones revisadas, se desprenden algunas preguntas: ¿Cómo caracterizar e identificar las prácticas matemáticas que los estudiantes ponen en juego cuando usan tecnologías digitales al resolver problemas? ¿De qué dependen que existan diferentes formas de explorar y resolver un problema? ¿Cómo se conceptualiza el aprendizaje de la matemática?

El conocimiento de los estudiantes se identifica como un elemento importante a considerar, también lo es el principio de problematización que contribuye para que los estudiantes se involucren en actividades de resolución de problemas matemáticos. Este como se ha mencionado, sigue un método de indagación o inquisitivo que se expresa mediante preguntas que los estudiantes plantean y persiguen para profundizar en el significado de los conceptos, representaciones, exploraciones, operaciones, y para trabajar en tareas matemáticas (Santos-Trigo, 2020). Es en esta dirección que se desarrolla la investigación que aquí se reporta y que tuvo como objetivo analizar prácticas matemáticas que los estudiantes desarrollan cuando trabajan en la resolución y propuesta de problemas de optimización en un ambiente de geometría dinámica.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

La resolución de problemas ha sido una parte importante del currículum en matemáticas y también un enfoque de enseñanza y aprendizaje en diferentes partes mundo (Toh et al., 2023). De acuerdo con investigadores como Santos-Trigo (2024) en este subyacen principios comunes, uno de ellos es una conceptualización del aprendizaje de las matemáticas como una disciplina que privilegia el desarrollo de prácticas matemáticas o hábitos de pensamiento matemático; dentro de ellas se reconoce buscar formas distintas de modelar y explorar los problemas, formular conjeturas y argumentos que las respalden, defender las ideas y desarrollar un lenguaje adecuado para comunicar los resultados. Así mismo, concibe la resolución de problemas matemáticos como una ruta de pensamiento en la que el estudiante exhibe hábitos, valores, recursos, estrategias, y una disposición consistente con la práctica matemática orientada a la comprensión de ideas y conceptos (Santos–Trigo, 2020). El autor asume que hay varias rutas para que el estudiante desarrolle pensamiento matemático, pero establece como una característica esencial de todas ellas, el brindar oportunidades para que los estudiantes reflexionen sobre los problemas, situaciones, contenidos, y conocimiento en términos de preguntas que necesitan respuesta.

Un método con las características anteriores fue propuesto por Pólya (1945) quien realizó un extenso estudio de métodos de solución de problemas, de este estableció cuatro etapas por la que transita un resolutor de problemas: entender el problema, idear un plan de solución, llevar a cabo el plan y realizar una retrospección. Toh et al. (2023) relacionan la etapa de retrospección del modelo de resolución de problemas de Pólya con la formulación de problemas. Enfatizan la importancia que la formulación tiene en las prácticas de los matemáticos, esta es una razón por la que también la tiene en la educación matemática.

La formulación de problemas, de acuerdo con Cai y Rott (2023) puede verse como un tipo de resolución de problemas, en el sentido de que a los estudiantes se les proporciona información y el objetivo es que formulen y resuelvan problemas. Cai y Rott (2023) proponen un modelo del proceso de formulación de problemas, semejante al proceso de resolución de problemas de Pólya (1945). Cuenta también con cuatro fases: orientación, conexión, generación y reflexión. La orientación corresponde a la comprensión de la situación; entender los datos involucrados y los requerimientos que se solicitan. La segunda fase es la conexión; en ella se identifican posibles conexiones, se proponen conjeturas y se desarrollan ideas para proponer nuevos problemas. En la fase de generación se realiza una representación externa de las conexiones llevadas a cabo en la fase de conexión, mismas que pudieron ser mentales. En la fase de reflexión es posible reformular un problema, esto implica monitorear y evaluar lo que se realizó durante la formulación.

Hoy en día, la investigación sobre los procesos de resolución y formulación de problemas ha considerado el uso de tecnologías digitales, dado el conjunto de herramientas que brindan para que los estudiantes realicen modelos dinámicos y utilicen estrategias como el arrastre de objetos de manera intencional, la cuantificación de atributos, el trazo de lugares geométricos, el uso de deslizadores, etc.. para explorar y resolver los problemas (Santos-Trigo, 2023).

Zbiek, et al. (2007) distinguen dos dimensiones de las tecnologías digitales relacionadas con la actividad matemática que se realiza con ellas, una técnica y otra conceptual; la primera se refiere a las acciones que se realizan mediante las herramientas de las tecnologías digitales sobre los objetos matemáticos como medir, calcular una integral, o sobre las representaciones de esos objetos, como las construcciones geométricas. La segunda involucra comprensión, comunicación, el reconocimiento de conexiones matemáticas, estructuras y relaciones; como encontrar y describir patrones, conjeturar, generalizar, abstraer y conectar representaciones. Los autores advierten del riesgo de ver a la actividad técnica como mecánica o carente de significado, y en contraste, a la actividad conceptual como generadora de aprendizaje significativo. Al respecto mencionan que la actividad técnica puede implicar una combinación de acciones mecánicas rutinarias guiadas por el razonamiento conceptual y que esto impide trazar una línea clara entre la actividad técnica y la conceptual que diferencie cuál de ellas tiene más significado matemático.

Los autores identifican en el trabajo de Borwein y Bailey (2008) actividades matemáticas que se derivan de formas de uso de las tecnologías, como: a) obtener ideas; b) descubrir patrones y relaciones; c) graficar para identificar principios matemáticos; d) probar y verificar conjeturas; e) explorar un posible resultado y reconocer si requiere una prueba formal; f) sugerir enfoques para la prueba formal; g) reemplazar cálculos extensos por otros realizados con las tecnologías digitales; y h) confirmar resultados obtenidos analíticamente.

3. METODOLOGÍA

La investigación se ubica en una perspectiva cualitativa, mediante un estudio de caso en donde participaron seis estudiantes que llamaremos D, F, I, J, M y S, de 18 y 19 años, inscritos en un curso de cálculo en el primer semestre de una carrera de ciencias.

Se reporta el trabajo realizado en dos sesiones de dos horas cada una, los datos fueron analizados de acuerdo con las fases propuestas en el modelo de Cai y Rott (2023). El análisis de la primera sesión corresponde a la fase 1 de orientación; el análisis de la segunda sesión a las fases 2, 3 y 4, de conexión, generación y reflexión, respectivamente.

Primera sesión.

Fase 1. Orientación.

Se llevó a cabo en forma presencial y de trabajo individual, se pidió a los estudiantes que resolvieran un problema de optimización, que llamaremos problema inicial (Figura 1).

Figura 1. Problema inicial.

Construir una caja de base rectangular sin tapa a partir de una lámina de cartón de $6x10cm$ recortando un cuadrado en cada esquina y doblando sus lados. Determinar la longitud del lado del cuadrado de corte para el cual la caja formada tiene un volumen máximo

Fuente: Elaboración adaptada de Stewart (2008, p. 328).

También se solicitó realizar la Tarea 1 (T1) que consistió en construir una animación en GeoGebra que simulara el problema inicial, con una vista gráfica en la que se visualizara la construcción de la base rectangular y los cuadrados de corte en las esquinas y con una vista 3D en la que se visualizara la simulación de la caja.

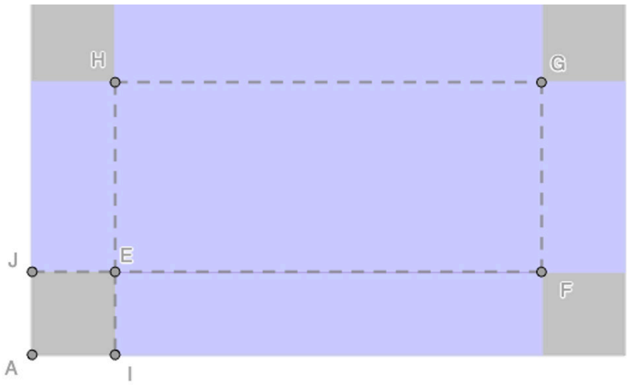
Se proporcionaron seis instrucciones esenciales y dos opcionales para realizar la simulación, estas últimas con la finalidad de detallar más la simulación resultante. Las instrucciones se presentan en la Tabla 1 y hacen referencia a la Figura 2.

Tabla 1. Instrucciones para construir la caja.

Esenciales	Opcionales
Construcción de un rectángulo fijo de valores en el primer cuadrante del plano cartesiano.	Intersección de los vértices del cuadrado de corte con los lados del rectángulo inicial, puntos I y J.
Relación de una variable con la longitud del corte y especificación de su rango.	Trazo discontinuo de los segmentos $\overline{JE}$ y $\overline{EI}$ que forman el cuadrado de corte.
Ubicación de coordenadas E,F,G,H de los vértices de un rectángulo dinámico.	Repetición de los puntos anteriores para las tres esquinas restantes.
Localización de al menos una coordenada en la vista 3D (esquinas de la caja que formarán su altura).	
Construcción de la caja vinculada al deslizador.	
Generación de un texto dinámico que muestre el volumen en tiempo real de la caja.	

Fuente: Elaboración propia.

Figura 2. Base de la caja rectangular indicando los cuadrados de corte y las pestañas de doblez.



Fuente: Elaboración propia.

Para analizar el trabajo de los estudiantes en esta fase de orientación, se elaboró un instrumento de recolección de evidencias que identifica la relación del concepto matemático con la herramienta de GeoGebra utilizada y su objetivo de uso (Tabla 2). En el caso de que el estudiante logre de manera autónoma o con alguna explicación breve del profesor, la identificación y relación de cada concepto matemático con alguna herramienta de GeoGebra que lo represente, se dirá que el estudiante desarrolló una comprensión del problema inicial. En caso contrario, se dirá que el estudiante no logró una comprensión de la situación inicial. El instrumento toma en cuenta sólo los pasos esenciales para la construcción de la caja.

Tabla 2. Instrumento de recolección de evidencias para la fase de orientación.

Paso	Herramienta de GeoGebra	Objetivo de su uso representado mediante una construcción en GeoGebra	Concepto matemático
1	Herramienta de polígono.	Construcción del rectángulo fijo.	Rectángulo de 10x6 unidades.
2	Deslizador definido en un intervalo.	Determinar la longitud de los lados del cuadrado de corte.	Variable y su dominio.
3	Punto, vista 2D generado desde la barra de entrada y vinculado al deslizador.	Generación de coordenadas dinámicas de las esquinas del rectángulo dinámico en $\mathbb{R}^2$.	Coordenadas en $\mathbb{R}^2$.
4	Punto, vista 3D generado desde la barra de entrada y vinculado al deslizador.	Construcción de coordenadas dinámicas en $\mathbb{R}^3$.	Coordenadas en $\mathbb{R}^3$.
5	Herramienta polígono o herramienta prisma.	Construcción de las paredes para formar la caja en $\mathbb{R}^3$. Generación directa del prisma.	Prisma rectangular
6	Variable y un texto vinculado a esta.	La variable guarda el valor del volumen y el texto vinculado a la variable lo muestra.	Fórmula del volumen de un prisma rectangular.

Fuente: Elaboración propia.

Segunda sesión

Fase 2. Conexión.

Los estudiantes trabajaron en dos equipos de forma remota vía Zoom. En esta sesión se les solicitó compartir sus soluciones al problema inicial, Tarea 2 (T2), y formular por equipo al menos dos conjeturas a partir del problema inicial, Tarea 3 (T3).

Aunque se dio seguimiento a los seis estudiantes, el foco de esta investigación está en el trabajo del equipo P integrado por los estudiantes D, F y J, cuyos procesos para llegar a la solución del problema inicial, a diferencia del resto del grupo, presentaron variantes en sus desarrollos algebraicos y en sus construcciones en GeoGebra.

Se diseñó un instrumento (Tabla 3) para documentar los conceptos matemáticos identificados en el problema inicial, los que relacionan con su actividad, las conexiones que identifican con otros temas para la formulación de un nuevo problema a partir del problema inicial y las conjeturas generadas en este nuevo contexto.

Tabla 3. Conexiones de conceptos matemáticos y conjeturas para nuevos problemas.

Identificación de conceptos matemáticos del problema inicial	Relaciones y conexiones con nuevos conceptos y reformulación de problemas	Conjeturas y esbozo de nuevos problemas

Fuente: Elaboración propia.

Esta fase de conexión se considera exitosa si el equipo presenta al menos dos esbozos de nuevos problemas relacionados con el inicial, y conjeturas sobre estos. En caso contrario, se dirá que los estudiantes no tuvieron éxito en esta fase. La razón de pedir al menos dos problemas se debe a que es probable que en uno de ellos cambien las dimensiones del rectángulo, lo cual no da evidencia de nuevas conexiones o relaciones con otros conceptos matemáticos, por lo que se espera que en el segundo se cuente con más información.

Fase 3. Generación.

Esta fase implica que los estudiantes externalizan las conexiones potenciales realizadas (conscientes o inconscientes) en la fase anterior. Es decir, la generación es un proceso cognitivo que implica creatividad y el surgimiento de ideas para la creación de nuevos problemas. Aquí pueden realizar variaciones del problema inicial o proponer nuevos problemas vagamente relacionados con este; también, se pueden probar las conjeturas de la fase anterior para ver si se cumplen o no, aunque el modelo no exige que se resuelvan los problemas formulados. Para fines de esta investigación, se acordó que el equipo tendría que resolver los problemas que formulara. De modo que, esta fase se considera exitosa si el equipo formula y resuelve al menos dos problemas a partir del problema inicial. El análisis de esta fase se realizó a partir de los protocolos de construcción de GeoGebra.

Fase 4. Reflexión.

En esta fase se revisa y evalúa el proceso de formulación de nuevos problemas a partir del problema inicial, se reflexiona sobre lo que se ha aprendido, mediante un proceso metacognitivo que incluye el monitoreo de lo que se hizo durante el proceso de formulación del problema (Erkan y Kar, 2022). Para el análisis de esta fase se elaboró un instrumento (Tabla 4).

Tabla 4. Instrumento de análisis.

Estrategias en la formulación y la resolución de problemas	Conceptos identificados en la formulación de problemas	Refinamiento de los problemas y conjeturas

Fuente: Elaboración propia.

Instrumentos de recolección de datos

- Instrumento de recolección de evidencias (Tabla 2).
- Preguntas y notas realizadas por los investigadores.
- Protocolos de construcción de GeoGebra sobre el problema inicial y los nuevos problemas.
- Archivo digital de la grabación de la segunda sesión.
- Conexiones de conceptos matemáticos y conjeturas en nuevos problemas (Tabla 3).
- Instrumento de análisis (Tabla 4).
- Entrevistas semiestructuradas a los participantes.

4. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Fase 1. Orientación

Los participantes contaban con poca o nula experiencia en el uso de GeoGebra, por lo que se les proporcionó un vídeo (J.G. Herrera, comunicación personal, 17 de septiembre de 2024) en donde se les mostró cómo utilizar algunas herramientas básicas: crear puntos, deslizadores, polígonos, acceder a propiedades de los objetos, entre otras, que se consideraron necesarias para simular la situación inicial.

Aunque el video les ayudó a familiarizarse con el ambiente de GeoGebra, esto no fue suficiente para que los participantes logran establecer la relación de una variable con un deslizador (Paso 2 de la Tabla 2); tampoco lograron vincular el deslizador con las coordenadas del rectángulo dinámico (Paso 3 de la Tabla 2), por lo que, el profesor intervino para apoyarlos como se muestra en las siguientes interacciones:

Profesor: ¿Les costó trabajo pasar de lo matemático al ambiente de GeoGebra? O sea, ¿cómo identificar los elementos matemáticos en GeoGebra? Por ejemplo, la variable… ¿cómo se interpretó eso?

Estudiante S: ¿Esa asociación? A mí sí, un poco. No supe como relacionar el deslizador.

Estudiante F: No me hacía sentido la relación del deslizador y la variable y las coordenadas. No estamos familiarizados con el sistema.

Estudiante J: Sí, no se me ocurrió cómo.

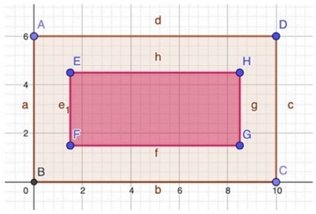
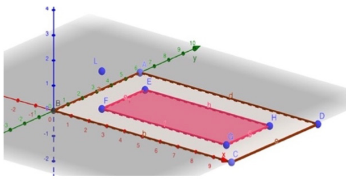
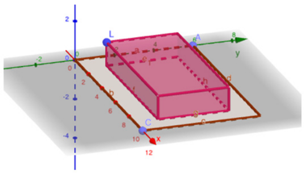
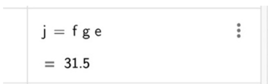
Después de la intervención del profesor, los seis estudiantes lograron realizar los pasos para llegar a la solución del problema inicial. En los protocolos de construcción de cada estudiante fue posible identificar conceptos matemáticos aludidos y las herramientas de GeoGebra utilizadas para llegar al resultado solicitado.

A continuación, se muestra parte de los protocolos de los estudiantes D, F y de la estudiante J, cuyos procesos, como se mencionó previamente, presentaron variantes en sus desarrollos algebraicos y en sus construcciones.

Estudiante D:

El protocolo de construcción del estudiante D cumplió todos los pasos del instrumento de recolección de evidencias (Tabla 2), se muestran los más importantes (Tabla 5).

Tabla 5. Protocolo de construcción del estudiante D.

Paso	Herramienta de GeoGebra	Construcción en GeoGebra	Concepto matemático
3	Creación de puntos dinámicos: *H = (d-e,c-e)*, *E = (e,a-e)* *G = (b-e,e)* *F = (e,e)* Generación de polígono dinámico ` *E, F, G, H*		Coordenadas en 2D y rectángulo inscrito en rectángulo inicial
4	Generación del punto dinámico en vista 3D *L = (e,e,e)*		Coordenada en 3D
5	Creación de prisma dinámico *(F,G,H,E,L)*		Prisma rectangular
6	Generación de la variable *j* que guarda el valor del volumen en un texto dinámico		Volumen del prisma: *j = f • g • e*

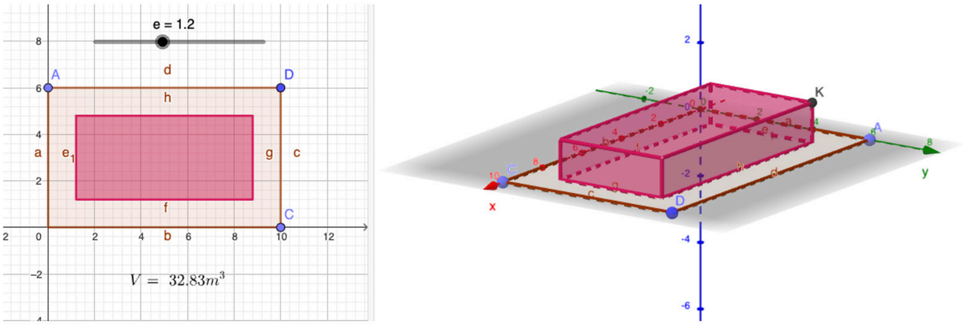
Fuente: Elaboración propia.

El estudiante D se centró más en las herramientas de GeoGebra que en los elementos matemáticos involucrados. Por ejemplo, para calcular la coordenada dinámica *H* (Paso 3), utilizó los segmentos *d* y *c* cuya longitud es asignada de manera automática por el sistema, a diferencia de sus compañeros que escribieron las coordenadas en términos de la medida de los lados del rectángulo inicial y el valor del deslizador. De forma similar, utilizó los valores de los segmentos *f, g* y *e* para calcular el volumen del prisma (Paso 6) como el producto *f* •

$g \bullet e$, en lugar de buscar la representación algebraica $v = (10\text{-}2e)\ (6\text{-}2e)e$ como otros de sus compañeros.

Para generar la caja, el estudiante D sólo calculó las coordenadas del vértice principal *(e,e,e)* en $\mathbb{R}^3$ y utilizó la herramienta prisma para generar el prisma rectangular, esto es, no calculó las cuatro coordenadas que formarían la altura de la caja y las paredes correspondientes. El volumen máximo de la caja obtenido fue $v = 32.83\ cm^3$, con cortes de 1.2 *cm* (Figura 3).

Figura 3. Construcción final del estudiante D.

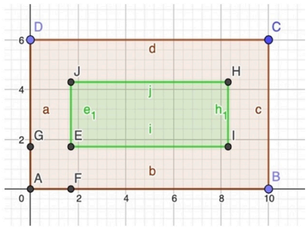
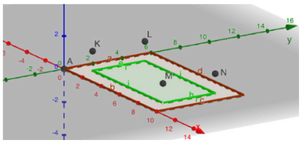
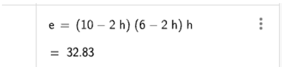


Fuente: Elaboración propia.

Estudiante F:

El estudiante F (Tabla 6), dio prioridad a las relaciones y cálculos algebraicos para determinar las coordenadas 2D, 3D y el volumen del prisma rectangular (pasos 3, 4, 5 y 6). Esto es, tomando como variable al deslizador *h*, calculó la longitud de los lados del rectángulo dinámico (verde), determinó las coordenadas de los puntos del rectángulo dinámico y el volumen de la caja. Las herramientas de GeoGebra ayudaron para que visualizaran la construcción de la caja y verificaran que los cálculos realizados con lápiz y papel fueran correctos.

Tabla 6. Protocolo de construcción del estudiante F.

Paso	Herramienta de GeoGebra	Construcción en GeoGebra	Concepto matemático
3	Creación de puntos dinámicos: $H = (10 - h, 6 - h)$ $I = (10 - h, h)$ $J = (h, 6 - h)$ Generación de polígono dinámico J, H, I, E		Coordenadas en 2D y rectángulo inscrito en rectángulo inicial
4	Generación de los puntos dinámicos en vista 3D: $K = (h,h,h)$ $L = (h,6-h,h)$ $M= (10-h,h,h)$ $N = (10-h,6-h,h)$		Coordenadas en 3D
6	Generación de la variable *e* para guardar el valor del volumen		Volumen del prisma

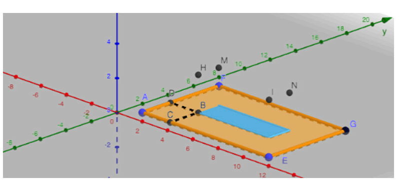
Fuente: Elaboración propia.

En el paso 3, el estudiante F realizó los pasos opcionales de creación de los puntos dinámicos del cuadrado de corte de la esquina inferior izquierda, puntos $F = (h, 0)$ y. $G = (0, h)$.

Estudiante J:

La estudiante J (Tabla 7), a diferencia de D y F, ubicó un rectángulo base (amarillo) en el primer cuadrante del plano y con todos sus vértices fuera del origen.

Tabla 7. Protocolo de construcción de la estudiante J.

Paso	Protocolo de construcción	Construcción en GeoGebra	Concepto matemático
4	Generación de los puntos dinámicos en la vista 3D: $H = (1 + b, 1 + b, b)$ $I = (11 - b, 1 + b, b)$ $M = (1 + b, 7 - b, b)$ $N = (11 - b, 7 - b, b)$		Coordenadas en 3D

Fuente: Elaboración propia.

Al igual que el estudiante F, la estudiante J se centró más en las relaciones o cálculos matemáticos; sus protocolos fueron idénticos. Sin embargo, mover la ubicación del rectángulo base del origen le generó una dificultad mayor, esto no fue obstáculo para que la estudiante lograra llegar al resultado solicitado.

Fase 2. Conexión

En esta fase comenzó el trabajo en equipo de las tareas T2 y T3. Mediante un análisis retrospectivo el equipo P formado por los estudiantes D, F y J, identificaron los conceptos matemáticos que intervinieron en la resolución del problema inicial y que se relacionaban con los contenidos del curso de cálculo. Además identificaron conceptos como el de ecuación cuadrática y cúbica en sus cálculos algebraicos, o conceptos como el de dominio, variable y rango al modelar la función a optimizar, entre otros. Formularon un par de conjeturas y esbozaron dos nuevos problemas a partir de la inicial. Posteriormente, discutieron posibles relaciones y conexiones de los conceptos identificados con los problemas formulados en T3, y en algunos casos evidenciaron la necesidad de integrar conceptos no considerados hasta el momento, a saber, las fórmulas del área del círculo y del volumen del cilindro, como se presenta en la Tabla 8.

Tabla 8. Conexiones de conceptos matemáticos y conjeturas para nuevos problemas.

Conceptos matemáticos del problema inicial	Relaciones y conexiones con nuevos conceptos	Conjeturas y esbozo de nuevos problemas
Dominio de la variable	Dominios de las nuevas variables	Si el rectángulo inicial se cambia a un cuadrado entonces el volumen máximo del prisma generado será el del cubo
Rango de una función	Rango de una función	Si metemos un cilindro en el prisma, el volumen máximo del cilindro se alcanza en el momento en el que el prisma alcanza su volumen máximo. En este caso el prisma será un cubo

Conceptos matemáticos del problema inicial	Relaciones y conexiones con nuevos conceptos	Conjeturas y esbozo de nuevos problemas
Área de un rectángulo y volumen de un prisma rectangular	Área de un cuadrado, de un círculo, volumen de un cilindro y de un cubo	
Concepto de función	Optimización de funciones	
Máximos y mínimos de funciones	Valores máximos y mínimos de las nuevas funciones	
Números positivos	Nuevos cálculos algebraicos	
Derivadas y ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas		

Fuente: Elaboración propia.

En la primera conjetura, consideraron que las dimensiones del cuadrado base serían de de 8 x 8, y que la función a optimizar era v (e) = $(8 - 2e)^3$, donde, "*e*" representa el deslizador o variable de corte. En la segunda, dedujeron que las dimensiones del cilindro requerido contenido en el prisma serían heredadas del cubo de volumen máximo, esto es, el radio del cilindro sería la mitad del lado del cuadrado base que generará el prisma de volumen máximo.

Fase de generación

Esta fase implica la externalización de nuevos problemas que son compartidos entre los equipos (Figura 4).

Figura 4. Primer problema del equipo P.

Construir una caja de base cuadrada sin tapa a partir de una lámina de cartón de 8 x 8 cm recortando un cuadrado en cada esquina y doblando sus lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado de corte para que la caja formada tenga un volumen máximo?

Fuente: Elaboración propia.

En esta fase las ideas que no han sido expresadas de manera consciente pueden revelarse como ocurrió con el equipo P en el segundo problema, en donde se propusieron investigar sobre el espacio libre contenido entre el prisma y el cilindro (Figura 5).

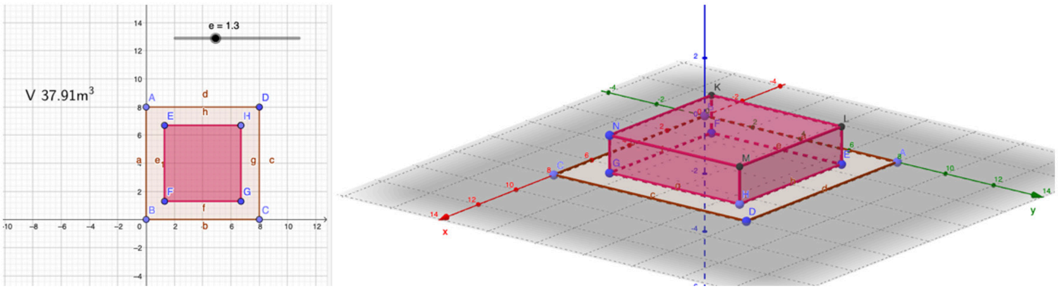
Figura 5. Segundo problema del equipo P.

Calcular es el volumen máximo posible del cilindro, estando este contenido dentro del prisma del problema anterior [el de volumen máximo], de tal manera que queremos obtener el mínimo volumen libre que queda o que sobra dentro de la caja.

Fuente: Elaboración propia.

Para analizar la resolución de los problemas formulados, se revisaron los protocolos de construcción. El equipo P realizó una distribución de tareas, dos de los integrantes realizaron los cálculos algebraicos en papel, mientras que el otro integrante la simulación en GeoGebra. La formulación del primer problema y su conjetura los condujo a la optimización de la función $v(e) = (8 - 2e)^3$. Al usar derivadas, llegaron a la solución única de $e = 4$, al relacionar que e representaba el valor de corte, identificaron que con ese resultado el volumen generado era 0, y el cubo desaparecía en el sistema de geometría dinámica. Esto los llevó a reconocer que la función $v(e) = (8 - 2e)^3$ no era la que debían optimizar, sino $v(e) = (8 - 2e)^2 (e)$. Al usar derivadas obtuvieron que el volumen máximo se obtendría con un valor de $e = 4$ o $e = 4/3 \approx 1.3$, seleccionaron el valor $e \approx 1.3$, y con este obtuvieron un volumen máximo de 37.9 u^3 (Figura 6).

Figura 6. Resultado del primer problema formulado del equipo P.

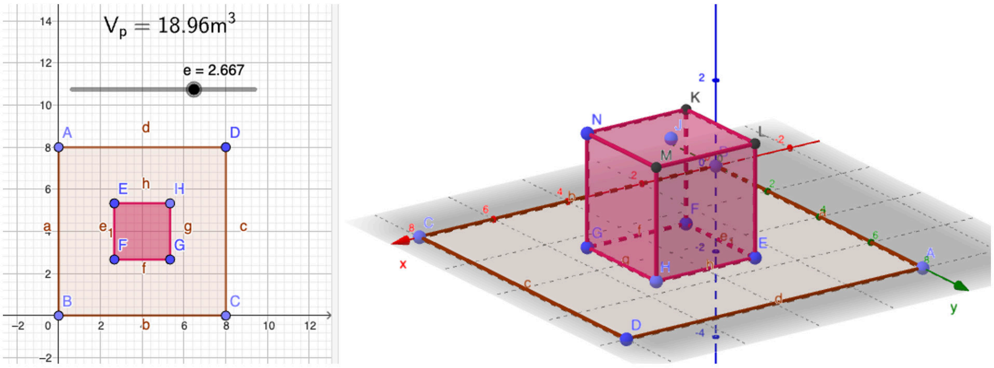


Fuente: Elaboración propia.

El problema que propusieron está dado en centímetros (cm) en su animación escribieron metros (m). Por lo que se consideró hacer referencia a este dato simplemente como unidades cúbicas.

En seguida regresaron a la simulación y movieron el deslizador hasta generar un cubo (Figura 7), al lograrlo se percataron de que el volumen de esta figura era de 18.96 u^3, y que este correspondía a un corte de e = 2.66, de esta forma rechazaron la conjetura que habían realizado.

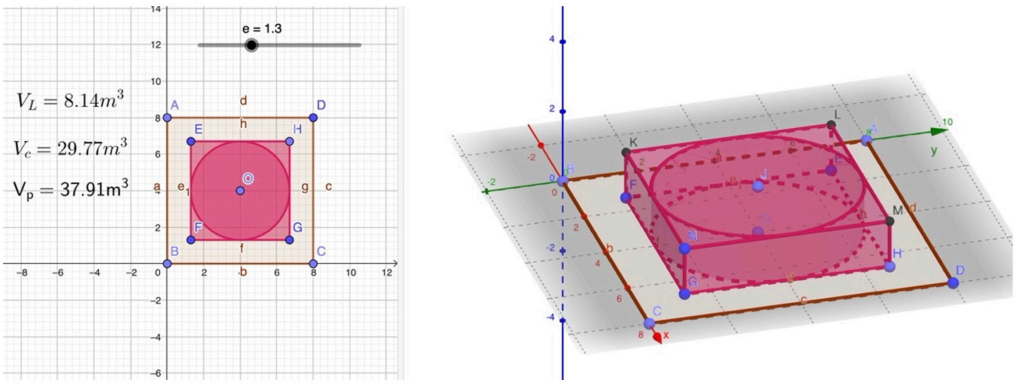
Figura 7. Resultado del primer problema formulado del equipo P.



Fuente: Elaboración propia.

Respecto al segundo problema formulado, la construcción del equipo P incorporó dos conceptos matemáticos adicionales, el de área del círculo y volumen del cilindro. El equipo se dio cuenta de que ya no era necesario optimizar una nueva función, ocuparon la información del primer problema formulado, esto es, calcularon el volumen máximo del cilindro contenido del prisma de volumen máximo. De esta manera, como el corte encontrado fue de 1.3 u, el radio del círculo correspondió a 4 – 1.3 = 2.7 u. Por lo tanto, el área del círculo obtenido fue de 22.9 u^2 y el volumen del cilindro de 29.77 u^3. Los espacios vacíos fueron calculados al restar ambos volúmenes máximos. El equipo elaboró la construcción del cilindro en GeoGebra, comparó y verificó los cálculos anteriores. En la Figura 8 se muestra el resultado final del problema del cilindro, en donde V_p representa el volumen máximo del prisma de base cuadrada, V_c el del cilindro máximo y V_L la solución del problema, es decir, los espacios vacíos entre el prisma y el cilindro.

Figura 8. Cilindro de volumen máximo inscrito en el prisma de volumen máximo.



Fuente: Elaboración propia.

Fase de reflexión

En esta fase, se revisa y se evalúa el proceso de formulación de los problemas. Para analizar esta fase, se llevó a cabo un análisis general sobre el trabajo de los estudiantes cuando transitan por las fases previas. Adicionalmente, se llevó a cabo una entrevista semiestructurada con el equipo P para complementar la información obtenida en las fases anteriores y triangularla con la de esta fase. El profesor inició con una pregunta para conocer sobre la motivación de los estudiantes.

Profesor: ¿Qué les pareció esta experiencia? ¿Cómo se sintieron?

Estudiante F: A mí me pareció muy interesante y me gustó mucho porque, los problemas de optimización me llaman mucho la atención. La sinergia que hicimos en las llamadas estuvo muy bien porque D estaba compartiendo la pantalla y haciendo los procesos en GeoGebra, y J y yo estábamos revisando las cuentas […] y al final pudimos ver que sí el resultado nos daba conforme D iba haciéndolo en GeoGebra.

Posteriormente los estudiantes mencionaron los conceptos evocados durante el proceso de resolución. También se identificó que el estudiante F inició su trabajo con lápiz y papel a diferencia de D, quién desde un inicio trabajó en GeoGebra y exploró las herramientas que le brindaba.

Profesor: ¿Qué sabían? ¿Qué aprendieron?

Estudiante J: Yo sabía un poco. Cosas con derivadas y eso.

Estudiante F: Bueno, yo de GeoGebra, como tal, no tenía mucho conocimiento, pero de lo que sí tenía idea es de cómo hacer los problemas de optimización en papel. En este caso teníamos que dar la fórmula del volumen, y ya con esa fórmula derivarla, y obtiener la x. Y bueno […] pues ya nos pusimos a pensar cómo podríamos expresar el lado, y bueno, es el lado menos dos equis, que serían los dobleces, ¿no? Y ya con eso, entonces, fue aplicar la fórmula y ponerla con la altura.

Profesor: ¿Les pareció complicado el problema inicial?

Estudiante D: Más que complicado, interesante por el cambio, porque mientras F iba trabajando más la parte de papel junto con J, yo me concentré más en aprender cómo era la construcción y cómo variaba la figura según la coordenada que le pusieras a los puntos en función del deslizador. Y sí, me pareció interesante.

Respecto a la formulación del primer problema los estudiantes decidieron modificar la forma de la base de la caja, cambiaron de un prisma de base rectangular a uno de base cuadrada. Esto los llevó a plantear una conjetura: que el volumen máximo se obtenía al formar un cubo, esta conjetura fue desechada a partir del proceso algebraico realizado y de las exploraciones realizadas en GeoGebra.

Profesor: ¿Cómo se les ocurrió formular los problemas? ¿Qué sucedió con sus conjeturas?

Estudiante F: Bueno, para el primero, tal cual dijimos, si tenemos una base rectangular, pensamos en si se podía escalar el problema hacia otras formas, y dijimos, ah, bueno, pues mira, intentémoslo con el cuadrado, a ver cómo resulta eso. Y luego probamos con otra forma, que ya fue el cilindro, y entonces dijimos, ah, bueno, si quisiera yo meter este cilindro en el prisma de base cuadrada, ¿qué medida tendría que tener? Y, pues, ¿cuál sería el volumen de los espacios que me van a quedar libres, no? Y pues fue así.

Profesor: Platíquenme sobre sus conjeturas que formularon.

Estudiante J: Bueno, el primer problema lo hicimos con base cuadrada y, entonces, pues habíamos pensado que la solución era un cubo, pero, nos dimos cuenta de que no, de que en realidad no sino que tenía que ser un prisma rectangular para poder ser optimizado de la manera que lo buscábamos.

Profesor: ¿Cómo se dieron cuenta de que un cubo no era la solución?

Estudiante F: Al variar la altura, como tal, porque si le dejamos la misma altura para hacer el cubo, pues, no quedaba. O sea, si pones los lados y la altura igual (8 – 2e) (8 – 2e) (8 – 2e), como que no te va a dar, la figura desaparece.

Profesor: ¿Entonces les ayudó la visualización del problema en GeoGebra?

Estudiante D: Sí, la verdad es que sí bastante, porque estábamos viendo, pero no salía, se desaparece la figura, […] entonces ya vimos, pero claro porque tiene que variar la altura que es justamente la variable del deslizador y entonces pues no es el lado $(8 – 2e)^3$, sino que es $(8 – 2e)^2$ por la e que es el deslizador, ya para así obtener la figura a optimizar.

Respecto a la formulación del segundo problema los estudiantes pensaron en un cilindro. Sus reformulaciones fueron evolucionando de la siguiente manera: "meter un cilindro en el prisma de base cuadrada" ⟶ "calcular el volumen máximo del cilindro contenido en la caja de base cuadrada" ⟶ "obtener el mínimo volumen libre que queda entre la caja y el cilindro de volumen máximo". Esto los llevó a conjeturar lo siguiente: el diámetro del cilindro de volumen máximo es la longitud del lado de la base cuadrada del prisma de volumen máximo. Su conjetura fue verificada y validada satisfactoriamente.

Profesor: Y sobre el segundo problema ¿qué conjeturaron?

Estudiante F: ¿Cómo sabemos cuál es el radio del cilindro? Es simple, nuestro radio será la mitad del diámetro y nuestro diámetro, como está contenido en el prisma, debe ser el lado que tenemos de nuestro prisma, esto es 8 – 2e, de manera que la mitad de ello sería 4 – e, este será nuestro radio. Sabemos que e, en la forma máxima de corte, es de 1.3, con lo que obtuvimos el volumen máximo de la caja.

Profesor: Sobre los conceptos que manejaron ¿qué relaciones y conexiones hicieron? ¿Qué información o conceptos necesitaron?

Estudiante F: Siempre había un dominio donde tenía sentido el problema, ¿no? porque si nos extendíamos del dominio, tal cual desaparecía la caja, dependiendo del problema, vamos a tener un dominio, ¿cómo decirlo? restringido, ¿no?

Estudiante D: Pues los dominios y rangos también. Valores máximos, y máximo de un dominio, fórmulas de áreas y volúmenes, ecuaciones cuadráticas y cúbicas.

Profesor:	¿Con qué otros conceptos?
Estudiante J:	Pues yo pensé en las funciones, respecto a cómo varían y de cómo podemos restringir unas funciones o tomar solo los valores tales que nos funcionen, como en este caso, los números positivos.

De la entrevista y de los protocolos de construcción de los estudiantes se infieren las relaciones y conexiones de conceptos con los problemas formulados y el inicial, sus conjeturas, cómo fueron refinando sus formulaciones y sus reflexiones. Asimismo, se pueden inferir las estrategias que utilizaron para la formulación y resolución de problemas, por ejemplo, en la formulación: escalar el problema inicial hacia otras formas (cuadrado, círculo, cubo y cilindro), y en la resolución: aplicación de derivadas y teoría de máximos y mínimos, o la comparación de cálculos algebraicos en papel con los cálculos de GeoGebra, o la comparación de los volúmenes generados por la animación en GeoGebra para determinar el volumen máximo.

El equipo P logró transitar por cada una de las cuatro fases del modelo de Cai y Rott (2023) de manera exitosa, logró formular al menos dos problemas a partir del problema inicial y encontrar las soluciones correctas.

DISCUSIÓN

Esta investigación se centró en los hábitos de pensamiento matemático que desarrollan los estudiantes al resolver problemas de optimización utilizando GeoGebra. Aunque al principio los estudiantes enfrentaron dificultades iniciales con GeoGebra, lograron formular y resolver nuevos problemas a partir del problema inicial de optimización. Algunas de las dificultades encontradas fueron: poca o nula familiaridad con el uso de GeoGebra, lo que les dificultó el poder relacionar sus herramientas con elementos matemáticos, como la asociación de una variable con un deslizador, y la vinculación de un deslizador con una coordenada dinámica. La intervención del profesor permitió superar las dificultades.

Los datos mostraron que, los hábitos de pensamiento matemático emergen durante la resolución y la formulación de problemas. El principio de problematización contribuyó para desarrollar hábitos como analizar un problema con diferentes enfoques y formular conjeturas; actividades centrales en el aprendizaje de las matemáticas que actuaron como catalizadores para el desarrollo de hábitos de pensamiento matemático.

Los resultados también muestran la importancia de las tecnologías digitales en el desarrollo de hábitos de pensamiento matemático. La experiencia con la implementación de la tecnología digital fomentó un aprendizaje activo, que se observó cuando los estudiantes buscaron diversas maneras de abordar un problema, modificarlo y encontrar los argumentos que sustentaban sus soluciones de manera analítica y en GeoGebra, mediante la comparación y verificación con simulaciones en tiempo real, esté puede considerarse también un hábito de pensamiento.

Por otra parte, respecto a la comprensión de los procesos de formulación de problemas, si bien Cai y Rott (2023) señalan que, la comprensión de los procesos de formulación de problemas se encuentra en una etapa temprana, es decir, se está lejos de comprender los procesos de formulación de problemas, en esta investigación se contribuye proporcionando algunas estrategias que pudieran ser útiles para fomentar la formulación de nuevos problemas, por ejemplo:

1) Incorporación de herramientas tecnológicas.

2) Intervenciones del profesor con preguntas orientadoras que ayuden a los estudiantes a reflexionar sobre las relaciones entre conceptos matemáticos y la tecnología digital elegida.

3) Utilizar el modelo del proceso de formulación de problemas de Cai y Rott (2008) para el diseño de actividades.

4) Análisis de protocolos de construcción del sistema de geometría dinámica para observar y analizar la evolución del pensamiento matemático del estudiante.

5) Tareas o actividades matemáticas como lo sugieren Borwein y Bailey (2008), esto es, diseñadas para ser trabajadas en un sistema de geometría dinámica, que involucren la exploración con deslizadores, descubrimiento de relaciones matemáticas, comprobación y refutación de conjeturas, comparación entre los cálculos en lápiz y papel con los realizados con una tecnología digital.

Dentro de las limitaciones de este estudio se puede decir que, aplicar estas estrategias a grupos numerosos puede resultar complicado, pues los estudiantes requieren apoyo adicional para el uso de herramientas tecnológicas, y el profesor o investigador interesado requerirá de tiempo suficiente para la revisión de protocolos de construcción o para analizar las diversas conjeturas que elaboren los estudiantes, por ejemplo, en nuestro caso, el estudiante D relacionó la solución del problema del cilindro inscrito en el prisma de volumen máximo con un problema de composición de funciones, el cual ya no fue analizado.

En investigaciones futuras, se podrían seguir este tipo de estrategias para la formulación y resolución de problemas en temas complejos como las parametrizaciones en 3D, y comparar el modelo de Cai y Rott (2023) con otros modelos disponibles.

CONCLUSIONES

El modelo del proceso de formulación de problemas propuesto por Cai y Rott (2023) permitió identifican hábitos de pensamiento matemático en los estudiantes participantes; 1) buscar formas distintas de modelar y explorar los problemas, como se evidencia en las Tablas 5, 6 y 7; 2) formular conjeturas y buscar argumentos que las respalden o refuten (Tabla 8 y desarrollo de la fase de generación); 3) la defensa de ideas que se manifiesta en las entrevistas; y 4) el desarrollo de un lenguaje adecuado para comunicar los resultados, que se observa en las entrevistas y en las simulaciones de los problemas formulados por los estudiantes.

Por otra parte, las evidencias recabadas de los protocolos de construcción en GeoGebra, permiten también identificar actividades matemáticas propuestas por Borwein y Bailey (2003) que se derivan de formas de uso de las tecnologías, como: a) obtener ideas como cuando exploraron con el deslizador nuevas formas para el prisma generado en el problema inicial que pudo motivar el considerar un cubo o un cilindro; b) descubrir relaciones como el valor del radio del cilindro en términos de la medida del lado del prisma de base cuadrada; c) probar y verificar conjeturas como cuando refutaron que el volumen máximo se obtenía al formar un cubo; d) reemplazar cálculos extensos por otros realizados con las tecnologías digitales como se evidencia en la Figura 7, cuando mediante el deslizador refutan su conjetura, o bien cuando obtienen el volumen del cilindro aludiendo a los valores obtenidos en las variables previamente (Figura 8); y h) confirmar resultados obtenidos analíticamente, como cuando compararon los resultados obtenidos mediante un procedimiento analítico y la exploración en GeoGebra.

REFERENCIAS

Borwein, J. y Bailey, D. (2008). *Mathematics by experiment: Plausible reasoning in the 21st Century.* AK Peters/CRC Press. https://doi.org/10.1201/b10704

Cai, J. y Rott, B. (2023). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM – Mathematics Education*, *56*, 61–71. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w

Erkan, B. y Kar, T. (2022). Pre-service mathematics teachers' problem-formulation processes: Development of the revised active learning framework. *The journal of mathematical behavior*, *65*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100918

Koichu, B. (2014). Reflections on Problem-solving. Problem Solving in Mathematics and in Mathematics Education. En M. N. Fried y T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (pp: 113–135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_8

Lester, F. K. Jr. (1994). Musing about mathematical problem-solving research: 1970–1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 660–675.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2020). Problem-solving in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 686–693). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0.

Santos-Trigo, M. (2023). Trends and developments of mathematical problem-solving research to update and support the use of digital technologies in post-confinement learning spaces. En T. L. Toh, M. Santos-Trigo, P. H. Chua, N. A. Abdullah y D. Zhang (Eds.), *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education: International Research and Practice Trends* (pp. 7–32). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_2

Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM – Mathematics Education*, *56*, 211–222. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan.

Sidenvall, J. (2019). Literature review of mathematics teaching design for problem solving and reasoning. *Nordic Studies in Mathematics Education, 24* (1), 51–74.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. Cengage Learning Editores.

Toh, T. L., Santos-Trigo, M., Chua, P. H., Abdullah, N. A., y Zhang, D. (2023). Problem posing and problem solving in mathematics education: International research and practice trends. En T. L. Toh, M. Santos-Trigo, P. H. Chua, N. A. Abdullah y D. Zhang (Eds.), *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education: International Research and Practice Trends* (pp. 1–5). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_2

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169–1207). NC: Infoage.