ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

Ronny Gamboa Araya
Escuela de Matemática
Universidad Nacional
rgamboa@una.ac.cr
Esteban Ballestero Alfaro
Escuela de Matemática
Universidad Nacional
eballestero@gmail.com

Resumen

En este escrito se pretende describir la problemática que implica la enseñanza y el aprendizaje de la geometría desde una perspectiva constructiva, que fomente la sensibilización del docente e incida positivamente en su práctica pedagógica.

Se ha desarrollado un análisis reflexivo considerando diferentes elementos de manera que el lector pueda disponer de argumentos que justifiquen relevancia del estudio de esta disciplina.

Palabras clave

Aprendizaje, enseñanza, razonamiento geométrico, visualización, construcción geométrica.

Abstract

This paper pretends to describe the problem related to the teaching and learning of geometry in the classroom from a constructive perspective, which foments the sensitization of the teacher; moreover impact positively in his/her pedagogic practice.

A reflexive analysis has been developed considering different elements so that, the reader can have arguments that justify the relevance of studying this area.

Key words

Learning, Teaching, Geometric Reasoning, Visualization, Geometric Construction.

1. Introducción

La importancia de la geometría como una materia del currículum escolar ha sido ampliamente reconocida por autores como Almeida (2002), quien señala que existen algunos objetivos generales que todo ciudadano debería alcanzar durante su formación básica: tener una cultura geométrica con visión histórica e interdisciplinaria, aplicar conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas reales, usar los diferentes lenguajes y representaciones, entre otros.

A partir de este punto de vista, la geometría se puede considerar como un instrumento reflexivo que le permite al ser humano resolver problemas de diversa índole y comprender un mundo que le ofrece una amplia gama de variadas formas geométricas, en cada uno de los escenarios que lo conforman, sea este natural o artificial.

En el sistema de educación formal, usualmente los contenidos de geometría son presentados a los estudiantes como el producto acabado de la actividad matemática, que deja en segundo plano los procesos implícitos de la construcción y de razonamiento en este conocimiento. La enseñanza tradicional de la geometría se enfatiza hacia el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas.

En escenarios similares se encuentran algunos docentes que priorizan la enseñanza de las matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos de geometría hacia el final del curso, hecho que los forza en ciertos casos a excluir algunos temas o atenderlos de manera superficial (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006).

Esta situación no encaja con las tendencias actuales, que sugieren oportunidades de aprendizaje donde los educandos participen activamente en el desarrollo de su conocimiento y se apropien de él (Hernández y Villalba, 2001). Las consecuencias de la enseñanza de la geometría bajo el enfoque tradicional se traducen en la concepción de ésta como una disciplina difícil y poco útil para la mayoría de los estudiantes.

Muchas de las inconsistencias del quehacer docente están condicionadas por la escasa reflexión que él mismo realiza sobre la disciplina que enseña. Si se intentara responder a las preguntas: ¿por qué es importante enseñar geometría? ¿Cuál es la percepción que tanto el docente como el estudiante tiene sobre la geometría? ¿Cómo aprenden geometría las personas? ¿Cuál sería una propuesta curricular que atienda a las necesidades propias de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría?, se daría cuenta de que existen escenarios grises que impiden tener una claridad de respuesta.

En las siguientes secciones de este escrito, se intentará hacer aportes que permitan generar una discusión académica alrededor de la búsqueda de respuestas a las preguntas planteadas previamente.

2. ¿Para qué enseñar geometría?

El desarrollo de la geometría ha estado relacionado con las necesidades del ser humano por comprender su mundo.

La aplicación de ella en la vida cotidiana muchas veces pasa inadvertida durante la enseñanza de esta disciplina.

La geometría ha sido considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural del hombre, dada su aplicación en diversos contextos y su capacidad formadora del razonamiento lógico (Báez e Iglesias, 2007); que contribuye a desarrollar en los estudiantes habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente, argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

La capacidad de relacionarse con el espacio es otra habilidad que puede desarrollarse a partir de la geometría, esto en función de que el individuo pueda comprender y admirar con mayores recursos su entorno natural (Lastra, 2005). En este sentido vemos que el desarrollo histórico de la geometría ha estado relacionado con actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas (Castiblanco, Urquina, Camargo, Acosta, 2004), situación que justifica un re-direccionamiento de los procesos de enseñanza hacia el logro de una visión contextualizada de la geometría, que a diferencia de la percepción disjunta que concibe su evolución de forma enajenada de la dinámica social, se oriente a potenciar esos encuentros comunes.

> La historia de la geometría nos muestra de qué manera ha sucedido su evolución en una dinámica soportada por la interacción entre procesos de visualización (ligados al pensamiento espacial), procesos de justificación (ligados al pensamiento deductivo) y aplicaciones instrumentales que se llevan a cabo con el objeto de resolver problemas de la vida cotidiana, las ciencias o la misma matemática, modelar el mundo para interpretarlo, ampliar los horizontes conceptuales con teorías construidas axiomáticamente e interrelacionar campos diversos de conocimiento buscando en ellos una estructura común, entre otras cosas. (Castiblanco et al., 2004, p. 9)

Con respecto a la comprensión propia de los objetos geométricos, el National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000) destaca que es con el aprendizaje de esta disciplina que los estudiantes aprenderán sobre las características y relaciones de estos, así como la construcción y manipulación mental de las diferentes representaciones de objetos en dos y tres dimensiones.

Asimismo, el NCTM señala que la geometría constituye un terreno fértil para el desarrollo de las habilidades para generar razonamiento y justificación. Castiblanco et al. (2004) también opinan al respecto que:

> Probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos. (…) no hay mejor lugar que la geometría para dilucidar el papel de la prueba y la demostración en matemáticas (p. 2).

Es decir, el conocimiento geométrico provee de recursos lógicos al estudiante que le permite hacer justificaciones, pruebas o validaciones con mayor rigor matemático, que pueden ser aprovechadas cuando desee realizar este mismo tipo de conjeturas en otras áreas de las matemáticas.

> Las habilidades que le competen respectivamente a la visualización y a la argumentación, no deben trabajarse de manera aislada, pues no son mutuamente excluyentes, sino más bien complementarias. El aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Mas aún, para lograr un aprendizaje significativo, es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido, y a su vez las habilidades visuales sean guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia. (Castiblanco et al., 2004, p. 25)

Como lo expone Castiblanco en el párrafo anterior, es importante que el docente se preocupe por buscar un equilibrio entre la asociación de habilidades de visualización y argumentación, pues ambas habilidades son fundamentales dentro del proceso formativo del individuo y para que el aprendizaje de la geometría no carezca de sentido, es decir, no se trata sólo de enseñar contenidos como una "receta" o por cumplir con lo estipulado en el currículum, sino que se pretende que con la enseñanza de la geometría el estudiante aprenda a pensar lógicamente.

Se han discutido diferentes elementos que están estrechamente relacionados con el estudio de la geometría, sin embargo, es importante tomar en cuenta otros aspectos que son considerados y resumidos en la siguiente lista propuesta por Hernández y Villalba (2001) donde brindan una visión de la geometría como:

- La ciencia del espacio, vista ésta como una herramienta para describir y medir figuras, como base para construir y estudiar modelos del mundo físico y otros fenómenos del mundo real.

- Un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en matemáticas y en otras ciencias; por ejemplo gráficas y teoría de gráficas, histogramas, entre otros.
- Un punto de encuentro en una matemática teórica y una matemática como fuente de modelos.
- Una manera de pensar y entender.
- Un ejemplo para la enseñanza del razonamiento deductivo.
- Un modelo para la enseñanza del razonamiento deductivo.
- Una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovadoras, como por ejemplo, gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones.

Posiblemente el lector tenga en mente algún otro aspecto que sea de importancia para el individuo, que se deriva directamente del aprendizaje de la geometría y que se haya omitido en este escrito, pero, independientemente de esta inconsciente omisión, con la información expuesta se deja en claro que el estudio de la geometría es un campo de conocimiento matemático que no debe escapar de la atención y se le debe asignar un papel especial.

Para todo profesor de matemáticas conocer y ser consciente de la utilidad de la geometría, su desarrollo histórico y posible aplicación al mundo real, pueden convertirse en elementos pilares que guíen su práctica docente hacia la creación de situaciones problema para los estudiantes, con el fin de que la geometría adquiera un sentido tangible, que contribuya con la estimulación y desarrollo de sus capacidades de percepción espacial y visual, y que minimice las dificultades que implica su estudio.

3. Percepciones sobre el aprendizaje y enseñanza de la geometría

No todas las personas ven un mismo objeto bajo la misma perspectiva…

Lo mismo sucede con la mayoría de las situaciones de la vida. La percepción de "algo" puede variar o mantenerse similar de una persona a otra.

En los últimos años, las encuestas realizadas en distintos países sobre el conocimiento matemático de los estudiantes, han reflejado que, con frecuencia, la geometría no ha ocupado un papel preponderante en el currículum escolar de las distintas naciones. Esto explica la ausencia de preguntas sobre geometría en dicha pruebas o bien, en el mejor de los casos, se incluyen unas pocas de tipo elemental, donde los alumnos manifiestan un desempeño pobre. Esto deja en claro que la geometría como asignatura formativa central en la enseñanza de las matemáticas, ha perdido importancia (Hernández y Villalba, 2001).

Frecuentemente la enseñanza de la geometría se limita a reconocer figuras y dibujarlas en el papel; las lecciones se desarrollan de manera abstracta, sin proporcionarle a los estudiantes ejemplos reales que le faciliten un mejor entendimiento de los contenidos (Goncalves, 2006). Además, los recursos utilizados son limitados, donde en una mayoría de los casos el proceso de enseñanza está condicionado por libros de texto conservadores, que impactan considerablemente el qué y cómo enseñar (Abrate et al., 2006).

Los alumnos se encuentran en una encrucijada cuando estudian geometría, porque el profesor les dice que es importante para su futuro como individuo, pero, el mismo proceso educativo en el que se encuentra inmerso no le permite visualizar esa importancia con suficiente claridad; de manera que el aprendizaje de la geometría carece de sentido y con el tiempo repercute en su estado anímico (Báez e Iglesias, 2007).

Báez e Iglesias (2007) señalan que, a nivel de educación básica, la enseñanza de las matemáticas presenta dificultades, particularmente la enseñanza y aprendizaje de la geometría, pues algunas veces los docentes no desarrollan los contenidos geométricos contemplados en los programas por desconocimiento de la importancia de la disciplina o poco dominio de los contenidos geométricos, y en aquellos casos en que sí se desarrollan, se hace enfatizando en el uso de fórmulas y cálculo de áreas.

Goncalves (2006) señala que:

> Los estudiantes pueden resolver problemas concretos con bastante habilidad, pero carecen de ideas cuando deben resolver esos mismos problemas planteados en un contexto algo diferente, abstracto o más formalizado. Otra situación típica de las clases de matemática, es la de los estudiantes que tienen que recurrir a memorizar las demostraciones de los teoremas o las formas de resolver los problemas, pues es la única manera de llegar aprobar los exámenes (p. 90).

Aunque parte de la importancia de la enseñanza de la geometría radica en ser la disciplina donde los estudiantes llevan a cabo procesos de razonamiento, pareciera que la realidad en las aulas es distinta, pues uno de los problemas en la enseñanza de la geometría es la dificultad que existe para que los estudiantes pasen de la descripción de las figuras a un proceso más formal, basado en razonamientos y argumentación (Castiblanco et al., 2004).

Cabe, en este caso, preguntarse: ¿qué piensan los estudiantes que han pasado por los procesos educativos formales de la primaria y secundaria, sobre su experiencia directa al estudiar geometría? Barrantes y Blanco (2005, 2004) señalan algunas concepciones que estudiantes ya graduados poseen acerca de la enseñanza de la geometría:

- Consideran que la finalidad de la enseñanza de la geometría es adquirir conocimiento, ya sea por cultura general o porque es una parte de las matemáticas y todas son importantes.
- Conciben la geometría escolar como una materia difícil, a la que se dedicaba poco tiempo.
- Señalan que la geometría es una materia muy teórica, abstracta y complicada de entender, para la que se necesita una mayor capacidad de razonamiento.
- Para los estudiantes la dificultad de la geometría radica, principalmente, en la memorización de fórmulas y saber cuándo aplicarlas.
- Indican que para aprender geometría es necesario la explicación del profesor y la práctica, pues si se es capaz de resolver las prácticas se puede verificar si se comprendió el tema en estudio.

- Revelan que la metodología clásica para la enseñanza de la geometría se divide en dos: la parte teórica, caracterizada por definiciones, propiedades, entre otros, y la parte práctica, entendiendo como sinónimos las palabras problema y ejercicio.
- Apuntan que los contenidos que más se estudian son los relacionados con la geometría plana; en la geometría espacial se profundiza menos.
- Manifiestan que la pizarra y el libro de texto son los recursos más utilizados para la enseñanza de la geometría.
- Destacan que el uso de materiales como figuras de madera u otros son poco frecuentes y cuando se utilizan se hacen construcciones o actividades sin ninguna utilidad posterior.
- Declaran que las actividades geométricas frecuentemente son extraídas del libro de texto y suelen estar relacionadas con el estudio de elementos de las figuras, clasificación y sobre todo de medida; es decir, resolución de problemas "tipo".
- Indican que el examen era el elemento más importante de la evaluación.

Los elementos anteriores reflejan una "crisis" en la enseñanza de la geometría y plantean una serie de interrogantes que deben comprometer a los responsables a encontrar diferentes alternativas de solución a esta problemática, dado que se ha desvirtuado la enseñanza de esta disciplina y se han dejado de lado procesos de razonamiento, argumentación y visualización.

La enseñanza de esta disciplina se ha inscrito en un ambiente aislado del entorno del estudiante, donde los contenidos no representan un conocimiento útil para éste y donde el ensayo, error y la discusión no son aprovechados como un medio para lograr un aprendizaje.

Al respecto, Báez e Iglesias (2007) señalan seis principios didácticos que consideran fundamentales dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría:

- Principio globalizador o interdisciplinar, que consiste en un acercamiento conciente a la realidad, donde todos los elementos están estrechamente relacionados entre sí.
- Integración del conocimiento, donde se parte de que el conocimiento no está fragmentado, sino que representa un saber integrado, lo que implica también una integración de los objetivos, contenidos, metodología y la evaluación.

- Contextualización del conocimiento, lo que implica adaptar los conocimientos a las necesidades y características de los estudiantes a partir del uso de hechos concretos.
- Principio de flexibilidad, pues aunque todo proceso educativo requiere de una planificación, de acuerdo a los estudiantes a los cuales está dirigido, su organización y administración debe ser adaptable a las necesidades de los educandos, sin perder de vista el logro de los objetivos propuestos.
- Aprendizaje por descubrimiento, que implica que todo proceso de enseñanza debe considerar una participación activa del estudiante, que propicie la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento.
- Innovación de estrategias metodológicas, lo que "obliga" al docente a buscar y emplear estrategias metodológicas que incentiven al estudiante hacia la investigación, descubrimiento y construcción del aprendizaje.

Por otra parte, Veloso (1998) [citado por Almeida, 2002] hace también un aporte en esta dirección, señalando que la enseñanza de la geometría en secundaria debe:Profundizar y sintetizar los aspectos geométricos en desarrollo, como la comprensión del espacio y de los respectivos modelos geométricos que son dados por las matemáticas; es decir, partir de problemas y situaciones relacionadas con el espacio, como la simetría, la forma y la dimensión.

- Integrar la historia de la geometría en su enseñanza, que permita al estudiante tener la noción de que existen otras geometrías.
- Buscar la conexión de la geometría con otras ramas de las matemáticas, con otras disciplinas como el arte y su aplicabilidad a contextos reales.

El NCTM (2000) dentro de su visión de estandarización de la enseñanza de las matemáticas, aporta directrices sobre hacia dónde debería orientarse la enseñanza de la geometría desde la enseñanza preescolar hasta la secundaria. Esta propuesta gira en torno a cuatro objetivos generales, para los cuales se detalla los objetivos específicos respectivos de cada nivel. Si bien esta propuesta podría contener algunos elementos que no se adaptan al contexto educativo costarricense, resulta provechosa en el sentido de que puede brindar algunas pautas a seguir en esta dirección para nuestro contexto.

A continuación se resume esta propuesta para los niveles del NCTM de secundaria.

Cuadro1. Directrices del National Council of Teachers of Mathematics para la Enseñanza de la Geometría.

Los programas de enseñanza de la geometría (todas las etapas) deberían capacitar a todos los estudiantes para:	**En la etapa 6-8, todos los estudiantes deberían:**	**En la etapa 9-12, todos los estudiantes deberían:**
Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas	Describir con precisión, clasificar y comprender las relaciones entre tipos de objetos de dos y tres dimensiones usando las propiedades que los definen. Comprender las relaciones entre los ángulos, las longitudes de los lados, los perímetros, las áreas y los volúmenes de objetos semejantes. Crear y criticar argumentos inductivos y deductivos concernientes a conceptos y relaciones geométricas, como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica.	Analizar las propiedades y determinar los atributos de objetos de dos y tres dimensiones. Explorar las relaciones (incluyendo la congruencia y la semejanza) entre objetos geométricos de dos y tres dimensiones, formular y comprobar conjeturas y resolver problemas relativos a ellos. Establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas, y criticar los argumentos de los otros. Usar relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas angulares.
Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.	Usar la geometría analítica para representar y examinar las propiedades de las figuras geométricas. Usar la geometría analítica para examinar figuras geométricas especiales, como polígonos regulares o polígonos con pares de lados paralelos o perpendiculares.	Usar coordenadas cartesianas y otros sistemas de coordenadas, como el de navegación, el de coordenadas polares o el de coordenadas esféricas, para analizar situaciones geométricas. Investigar conjeturas y resolver problemas relativos a objetos bidimensionales y tridimensionales representados con coordenadas cartesianas.

Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.	Describir los tamaños, las posiciones y las orientaciones de figuras geométricas sometidas a transformaciones informales como reflexiones, rotaciones, traslaciones y escalas. Examinar la congruencia, la semejanza, y la simetría respecto a una recta o un centro usando transformaciones.	Comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones de objetos en el plano, utilizando croquis, coordenadas, vectores, notación funcional y matrices. Usar varias representaciones para ayudar a entender los efectos de las transformaciones y de sus composiciones.
Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.	Dibujar objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos. Usar representaciones planas de objetos tridimensionales para visualizar y resolver problemas de áreas y volúmenes, entre otros. Usar herramientas visuales, como las redes, para representar y resolver problemas. Utilizar modelos geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas. Reconocer y aplicar ideas y relaciones geométricas en campos ajenos a la clase de matemáticas, como el arte, las ciencias y la vida diaria.	Dibujar y construir representaciones de objetos geométricos de dos y tres dimensiones utilizando distintas herramientas. Visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones transversales. Utilizar grafos para modelizar y resolver problemas. Usar modelos geométricos para facilitar la comprensión y contestar preguntas relativas a otras áreas de las matemáticas. Utilizar ideas geométricas para resolver problemas y obtener ideas de otras disciplinas y áreas de interés, como el arte y la arquitectura.

Fuente: NCTM (2000).

De la propuesta anterior se puede observar que los procesos de descripción, comprensión, análisis, construcción, exploración, visualización, argumentación, aplicación, entre otros, deben ser implementados en la enseñanza de geometría mediante el planteamiento de situaciones problema que le exijan al estudiante un nivel cognitivo que no limite al uso de una fórmula o proceso algorítmico.

Como ya se indicó anteriormente, lo expuesto es una propuesta, que muestra una visión sobre lo que se debe hacer. El cómo y con qué es responsabilidad del profesor, el cual, además, deber ser conciente que los procesos citados en el párrafo anterior no son propios de la geometría, sino que contribuyen en el aprendizaje de otras áreas de las matemáticas y en la formación integral de un individuo.

4. Procesos de visualización y justificación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría

Cada persona desde el momento de su nacimiento crea representaciones del mundo físico que le rodea. Estas representaciones le generan una necesidad de tipo teórica y práctica para lograr este entendimiento. El hemisferio derecho del cerebro resulta ser el más beneficiado ante la presencia de estímulos visuales a diferencia del hemisferio izquierdo, que tiene la responsabilidad de desarrollar las capacidades verbales.

¿Qué observas en la foto?

¿Viste el niño?

El estudio de la geometría contribuye significativamente al desarrollo de esas necesidades espaciales de visualización, sin embargo, hasta una época histórica reciente que data a partir de la década de los años 50, es que los educadores matemáticos se interesan por el estudio de dicho campo, al vincular la capacidad matemática con la capacidad espacial.

La capacidad aritmética y el desarrollo de la capacidad de razonamiento lógico nunca han sido puestos en entredicho en el currículo escolar. Por otra parte, los contenidos geométricos asociados a la capacidad espacial sí han sufrido la condición de ser desplazados a un segundo plano en importancia, dónde prácticamente desapareció de los planes de estudio durante la época de los años sesenta y setenta, como consecuencia del posicionamiento de la llamada Matemáticas Modernas, caracterizadas por su formalismo y la algebrización de la geometría. Hoy se reconoce que la capacidad visoespacial para algunas profesiones como escultura, dibujo, topografía ingenierías, arquitectura, resulta imprescindible.

Otros autores como Castiblanco et al. (2004) mencionan que el aprendizaje de la geometría se centra principalmente en tres aspectos:

a) Los procesos de visualización (que constituyen el soporte de la actividad cognitiva en geometría donde el estudiante "evoluciona" en su percepción de los objetos) y su potencial heurístico en la resolución de problemas.

b) Los procesos de justificación propios de la actividad geométrica.

c) El papel que poseen las construcciones geométricas en el desarrollo del conocimiento geométrico.

Los autores hacen alusión a que el estudio de la geometría debe desarrollar las capacidades de visualización de los individuos, desarrollar estrategias creativas para resolver problemas, ser capaz de justificar toda la actividad geométrica, apoyado en construcciones geométricas.

Para ir profundizando el concepto de visualización, se considera la siguiente definición, propuesta por Torregrosa y Quesada (2007), quienes señalan que en el estudio de la geometría se denomina visualización al proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental de un objeto (que no tiene que ser igual para todos) o viceversa. Es decir, un dibujo de un cuadrado (que está sujeto a ciertas definiciones y propiedades) condiciona en cada individuo una imagen mental de éste, que va estar asociada a ciertas afirmaciones matemáticas que el mismo individuo le proporciona.

La definición anterior hace mención a que la visualización es ante todo un proceso, esto implica que debe darse de forma paulatina. El individuo primeramente se ve expuesto ante un dibujo geométrico estático, pero, cuando el individuo empieza a extraer relaciones o identificar algunas propiedades que le permiten conocer con mayor profundidad aquel dibujo, entonces se dice que está visualizando. La figura estática empezó a tener más sentido y mentalmente empieza a construir una imagen más compleja, que va más allá de los trazos externos. La capacidad de ver más allá de lo descriptivo en un dibujo geométrico, identificando propiedades y comprendiendo su interrelación, resume los elementos que pueden derivarse a partir de la visualización.

Clements y Battista (1992) [citado en Castiblanco et al., 2004] consideran que "la visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales observadas en construcciones y manipulaciones" (p. 10).

Las representaciones geométricas pueden ayudar a los estudiantes a comprender otras áreas de las matemáticas, por ejemplo, fracciones y multiplicaciones aritméticas, fórmulas notables en álgebra, relaciones entre representaciones gráficas de funciones y representaciones de datos en estadística (Jones, 2002).

Es importante entonces, reconocer las diferencias entre la dualidad dibujo o figura en geometría y una construcción geométrica. Un dibujo geométrico se construye a partir de la percepción, en la que se pueden utilizar todos los instrumentos geométricos disponibles (regla, compás, transportador), son las que se utilizan con más frecuencia y permiten construir, de manera ágil, un dibujo que representa un problema (Tsijli, 1999). Una construcción geométrica representa la solución a un problema, cumple con las propiedades geométricas necesarias para facilitar la visualización y legitima las conclusiones que pueden derivarse de ella.

De acuerdo con Castiblanco et al. (2004) la construcción geométrica se puede describir de la siguiente manera: "un dibujo técnico, en el que la utilización apropiada de ciertos instrumentos asegura la adecuación del dibujo a determinadas propiedades" (p. 17).

Además, complementa esta definición haciendo referencia a dos funciones esenciales que la construcción geométrica tiene:

- Asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas.
- Lograr una generalización de la situación determinada a otros contextos o figuras con las mismas características.

De esta forma, una construcción geométrica no es solamente un dibujo, pues permite "verificar" las conclusiones que de ésta se pueden obtener, donde las propiedades presentes en ella son construidas de manera explícita como un resultado necesario para la construcción y donde siempre existirá un resultado geométrico que respalde la veracidad de las relaciones entre los elementos presentes en ella.

Duval (1998), citado por Castiblanco et al., 2004, señala tres niveles de razonamiento en geometría:

- Nivel global de percepción visual, el cual nos permite relacionar figuras con objetos físicos, donde se destaca la forma total de la imagen a partir de la posición o el tipo de trazo.
- Nivel de percepción de elementos constitutivos, donde no solamente se percibe la imagen globalmente, sino formada por elementos de una misma dimensión o inferiores. En este nivel la posición o tamaño no son importantes, pues la atención se centra en establecer las relaciones entre los elementos que conforman la imagen.
- Nivel operativo de percepción visual, en el cual se puede "operar" sobre las figuras, es decir, permite la manipulación mental de los elementos constitutivos de ésta.

Para avanzar en el aprendizaje de la geometría los estudiantes deben pasar de un discurso informal basado en una argumentación descriptiva, a un discurso formal, que apoyado en la visualización se genere un razonamiento que no se basa en una simple descripción de una figura, sino que encadena proposiciones usando inferencia lógica, donde se enuncia definiciones y teoremas (Castiblanco et al., 2004).

Los niveles de razonamiento geométrico que propone Duval, constituyen una base teórica general que puede servir como marco de referencia para investigaciones en geometría. Al igual que este autor, otros hacen sus aportes proponiendo otros marcos teóricos que intentan categorizar estos razonamientos de los individuos con respecto al estudio de la geometría. En el siguiente apartado se enfocará a detallar el marco conceptual que propone Van Hiele.

5. El modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría

Jaime (1995) señala que el modelo de Van Hiele surgió producto de la observación de los problemas cotidianos que se presentan en las aulas. Los Van Hiele eran dos esposos holandeses, profesores de secundaria, que reflexionaron sobre la problemática relacionada con la incomprensión, por parte de los estudiantes, de la materia que ellos les explicaban.

El mismo autor señala que aunque se han formulado varias explicaciones sobre el aprendizaje de las personas, centrado en la geometría, el modelo más específico es el formulado por los Van Hiele. Así, este modelo, a pesar de la "antigüedad", representa las actuales líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas y constituye una teoría propia en la investigación en geometría (Goncalves, 2006).

Este modelo incluye dos aspectos, uno descriptivo y otro prescriptivo. Jaime (1995) señala que el primero intenta explicar cómo razonan los estudiantes a través de una secuencia de niveles de razonamiento. La segunda parte del modelo da algunas pautas a seguir, llamadas fases de aprendizaje, para la organización del proceso de enseñanza con el fin de lograr que los estudiantes alcancen los distintos niveles de razonamiento.

Van Hiele (1957) señala que en el proceso de formación de la comprensión en geometría:

1. Se produce una estructuración del campo perceptivo. El caso de si esta estructuración es o no repentina no tiene mucha importancia puesto que ello no juega un papel determinante en el proceso de aprendizaje.
2. La estructuración del campo perceptivo va unida a distintas palabras.

3. El proceso mental acerca de las figuras se va desarrollando cada vez más en el terreno verbal, es decir, la estructuración perceptiva se va convirtiendo paulatinamente en estructuración lingüística.

4. Se crea cierta autonomía en la estructuración lingüística. Ciertas agrupaciones de premisas llevan automáticamente a determinadas conclusiones, o a la inversa, la búsqueda de ciertas conclusiones lleva automáticamente a la búsqueda de ciertas premisas

El mismo autor señala que al formarse la comprensión geométrica nos encontramos por tanto con tres estructuraciones: una estructuración perceptiva, una estructuración lingüística y una estructuración lógica. Así, según se progresa en geometría se elimina cada vez más el lenguaje, de manera que se pasa directamente de la estructuración perceptiva a la simbología sin haber usado el lenguaje.

5.1. Los niveles de razonamiento

Hay cinco niveles de razonamiento en el modelo de Van Hiele, los cuales establecen que la forma en que se conciben los conceptos geométricos no es siempre la misma y varía conforme el alumno va progresando en el estudio de las matemáticas. Estos niveles de razonamiento no están asociados con la edad de los estudiantes, pues dependen de la enseñanza recibida por cada uno, así como de sus experiencias. Nivel 1: Visualización o reconocimiento.

En este nivel los conceptos son considerados de forma global, no se tienen en cuenta elementos, propiedades o atributos. No se generalizan características de una figura a otras de su misma clase. La descripción de los objetos se hace por percepciones visuales.

- Nivel 2: Análisis

En este nivel los conceptos se entienden y manejan a través de sus propiedades. El estudiante identifica y generaliza propiedades de un determinado concepto, pero no establece relaciones entre ellas. Todo descubrimiento o verificación lo hace a través de la experimentación. Para definir un concepto dan una lista de propiedades, agregando algunas innecesarias u omitiendo otras imprescindibles; no realizan clasificaciones inclusivas.

- Nivel 3: Ordenación o clasificación

La característica principal de este nivel es que los estudiantes pueden establecer relaciones entre las propiedades. Se parte de la experimentación para crear la necesidad de recurrir a una justificación formal a partir de propiedades conocidas, se aceptan definiciones nuevas de conceptos conocidos, aunque impliquen variación de algunas características de las anteriores y se utilizan clasificaciones inclusivas. Siguen las demostraciones, pero en la mayoría de los casos, no entienden su estructura. Se establecen relaciones entre los diversos conceptos a partir de sus definiciones.

- Nivel 4: Deducción formal

En el cuarto nivel se efectúan demostraciones formales, vinculando implicaciones simples para llegar desde la hipótesis hasta la tesis. Aceptan la existencia de definiciones equivalentes y de demostraciones alternativas.

- Nivel 5: Rigor

En este nivel se conoce la existencia de distintos sistemas axiomáticos (diversas geometrías). Se puede trabajar la geometría de manera más abstracta.

5.2. Fases del modelo de Van Hiele

Los Van Hiele elaboran una propuesta para la adquisición de nuevas habilidades de razonamiento por parte del alumno. Sin embargo, el paso de un nivel a otro requiere de tiempo, incluso años, aún cuando las actividades que el profesor proponga sean ordenadas y consideren las fases de aprendizaje.

Para cada fase se indica cómo deben ser las actividades propuestas y la intervención del profesor.Primera fase : Información

Esta fase permite que los alumnos conozcan el tipo de trabajo que van a hacer y que el docente descubra el nivel de razonamiento y el conocimiento que poseen sus alumnos sobre el nuevo tema. El docente y los estudiantes toman contacto con el material y los objetos a estudiar. Se hacen las primeras preguntas, se realizan las primeras observaciones y se introduce el vocabulario específico.

- Segunda fase: Orientación dirigida

El profesor guía a los estudiantes para que estos descubran el conocimiento que se desea. Los alumnos exploran el tópico propuesto utilizando el material educativo según las orientaciones del docente. Las actividades permiten descubrir a los estudiantes las propiedades de los objetos o ideas matemáticas exploradas.

- Tercera fase: Explicación

Su objetivo es que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas. Los alumnos construyen y expresan sus propios descubrimientos y el docente realizará las correcciones de lenguaje necesarias.

- Cuarta fase: Orientación libre

En esta fase las actividades deben permitir a los alumnos resolver nuevas situaciones con los conocimientos ya adquiridos. Los estudiantes realizan tareas más complicadas pudiendo ellos mismos orientar sus investigaciones; estos desarrollan capacidades de análisis cuando por sí mismos encuentran la explicación y justificación de sus resultados.

- Quinta fase: Integración

Tiene por objetivo establecer y completar los conocimientos adquiridos. Los estudiantes revisan los resultados y se forman una idea global de las relaciones y propiedades aprendidas. El rol del docente es ayudarlo a realizar esta síntesis de conocimientos, puede proponer resúmenes y recalcar los resultados más importantes.

El modelo tiene varias características que son importantes de conocer, para evitar posibles confusiones o interpretaciones inadecuadas bajo este marco conceptual:

- Secuencialidad:

En la adquisición de los niveles, no es posible alterar su orden.

- Especificidad del lenguaje:

Cada nivel tiene su lenguaje propio.

- Paso de un nivel al otro:

El paso de nivel al otro no se hace de forma abrupta, sino que hay un periodo durante el cual se presentan razonamientos de dos niveles (estado intermedio).

- Globalidad y localidad:

Las investigaciones parecen indicar que el nivel de razonamiento es local, es decir, el nivel en el que un estudiante se encuentra para un determinado concepto puede variar para otro.

- Instrucción:

La adquisición de sucesivos niveles no es un aspecto biológico, pues intervienen en gran medida los conocimientos recibidos y la experiencia personal.

Si se consideran los niveles de Van Hiele para la enseñanza de la geometría, el profesor debe realizar una adecuada planificación del proceso educativo, que tome en cuenta las fases de aprendizaje y el diseño de actividades que, mediante los distintos recursos disponibles para la enseñanza de la geometría, contribuya al logro de un nivel de razonamiento "superior".

Realizando una comparación entre los tres niveles de razonamiento en geometría expuestos por Duval y los cinco expuestos por los Van Hiele, podríamos decir que éstos están relacionados.

Mientras que para Duval el nivel global de percepción de visual es el que permite relacionar figuras con objetos, donde se destaca la forma de la imagen e influyen aspectos como la posición o el tipo de trazo, en el nivel de visualización o reconocimiento de los Van Hiele, los conceptos o figuras son considerados de forma global y la descripción de ellos se hace únicamente por percepción visual.

Es posible apreciar entonces que en ambos niveles no se hace una generalización de las características de las figuras y de los objetos, y su "aprendizaje" se hace a través de la percepción visual.

Esta semejanza entre el primer nivel de ambos autores se da también en los niveles siguientes. A continuación se resumen las semejanzas de estos niveles.

Cuadro 2. Semejanzas de los modelos de Van Hiele y Duval

Niveles	**Van Hiele**	**Duval**	**Semejanzas**
Nivel 1	Visualización o reconocimiento. Los conceptos son considerados de forma global, no se tienen en cuenta elementos, propiedades o atributos. No se generalizan características de una figura a otras de su misma clase. La descripción de los objetos se hace por percepciones visuales.	Nivel global de percepción visual Permite relacionar figuras con objetos físicos, donde se destaca la forma total de la imagen a partir de la posición o el tipo de trazo.	No se hace una generalización de las características de las figuras y de los objetos, y su "aprendizaje" se hace por medio de la percepción visual.

Nivel 2	Análisis Los conceptos se entienden y manejan a través de sus propiedades. El estudiante identifica y generaliza propiedades de un determinado concepto, pero no establece relaciones entre ellas. Todo descubrimiento o verificación lo hace a través de la experimentación. Para definir un concepto dan una lista de propiedades, agregando algunas innecesarias u omitiendo otras imprescindibles; no realizan clasificaciones inclusivas.	Nivel de percepción de elementos constitutivos No solamente se percibe la imagen globalmente, sino formada por elementos de una misma dimensión o inferiores. En este nivel la posición o tamaño no son importantes, pues la atención se centra en establecer las relaciones entre los elementos que conforman la imagen.	Los conceptos e imágenes se conciben a partir de sus características. La forma o posición de las figuras no son relevantes.
Nivel 3	Ordenación o clasificación Los estudiantes pueden establecer relaciones entre las propiedades. Se parte de la experimentación para crear la necesidad de recurrir a una justificación formal a partir de propiedades conocidas. Se aceptan definiciones nuevas de conceptos conocidos, aunque impliquen variación de algunas características de las anteriores y se utilizan clasificaciones inclusivas. Siguen las demostraciones, pero en la mayoría de los casos, no entienden su estructura. Se establecen relaciones entre los diversos conceptos a partir de sus definiciones	Nivel operativo de percepción visual Se puede “operar” sobre las figuras, es decir, permite la manipulación mental de los elementos constitutivos de ésta.	Los estudiantes logran un nivel de “abstracción” que les permite realizar justificaciones de propiedades observables en construcciones geométricas a partir de la manipulación mental de éstas. Se establece que las características de un objeto se mantiene invariantes sin importar la manipulación que se haga de su representación geométrica

Fuentes: Van Hiele (1957), Duval (1998), Castiblanco et al. (2004). Elaboración propia.

Aunque los niveles anteriormente expuestos presentan características comunes, los Van Hiele exponen dos niveles más (deducción formal y rigor) que se relacionan con los procesos formales de demostración, los cuales, por lo general, no se logran en la educación secundaria.

Sin embargo, como ya se mencionó anteriormente, el modelo más específico relacionado con el aprendizaje de geometría y constituye una teoría propia en la investigación de esta disciplina.

6. Consideraciones finales

La geometría representa un modelo del espacio físico que nos rodea. Para aprender geometría el estudiante debe comprender las relaciones, características y propiedades de los objetos sin importar la representación que se haga de ellas. No se puede seguir enseñando geometría como un producto acabado, suprimiendo todo el proceso de construcción de dicho conocimiento y aislándola del mundo o de las otras áreas de las matemáticas. Es necesario que el estudiante tome un papel activo en su aprendizaje y se le exija un poco más que ser un receptor de información.

Aunque es una realidad que todo acto educativo requiere planificación de acuerdo al contexto en el cual se desarrolla, ya no se puede pensar en esa clase donde el profesor controla y "sabe" todo. En una clase de geometría se debe dejar el espacio para la discusión, la experimentación, el ensayo y el error, aprovechando éste como una herramienta para el aprendizaje y parte del quehacer matemático. Es decir, una clase donde el estudiante tenga una participación activa, dirigida por la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento.

Esta situación obliga al profesor a innovar sus prácticas educativas y "renovar" sus estrategias metodológicas, donde las situaciones propuestas tengan su origen en el contexto del estudiante, incluyan la historia de la geometría y su relación con las otras áreas del conocimiento humano. El docente debe propiciar actividades que conduzcan al alumno a deducir resultados mediante representaciones, construcciones, mediciones y experimentación, para luego "formalizarlas" con la guía del profesor.

Los recursos con los que el profesor cuenta para desarrollar sus lecciones van desde material de desecho hasta una computadora, lo importante es que el uso que se haga de ellos permitan desarrollar en los estudiantes las habilidades requeridas para lograr un verdadero aprendizaje.

El desarrollo de capacidades aritméticas, algebraicas, lógicas, visoespaciales y otras que le competan al estudio de la geometría, deben buscar un equilibrio. Para esto el docente debe tener claro que todas las capacidades son igualmente importantes y debe potenciarlas en sus salones de clase, en especial, no descuidar la capacidad de visualización espacial, que con frecuencia es la más sacrificada.

El educador debe ser conciente de que en la enseñanza de la geometría es difícil plantearse objetivos a corto plazo, pues los conceptos que se estudian se siguen utilizando conforme el estudiante progresa en su formación geométrica, pues la consolidación de estos conocimientos se producirá cuando el estudiante logre relacionarlos con otros contenidos y conocer su aplicabilidad. La capacidad del estudiante para desarrollarse y lograr un pensamiento crítico y un razonamiento lógico no depende de situaciones problema totalmente nuevas y difíciles, sino de situaciones sencillas pero con un nuevo enfoque que le impliquen un razonamiento progresivo y más elaborado conforme avanza en el estudio de la disciplina, donde importa tanto el resultado final como el proceso para llegar a él.

Enseñar geometría implica reconocer y seleccionar problemas geométricos interesantes, teoremas, apreciar el contexto cultural e histórico de la geometría y comprender la variedad de usos y contextos en los cuales está presente la geometría (Jones, 2002).

Es importante que el docente tenga claro el nivel de aprendizaje sobre geometría que los estudiantes necesitan para su futuro y en particular, cuánto de ese aporte se puede hacer a partir de su curso. En los marcos conceptuales como el de Van Hiele y Duval, el problema de aprender y enseñar geometría es complejo, máxime si la evolución de la comprensión o el razonamiento de los conceptos geométricos es local y suponiendo, además, que se imparte geometría a grupos de más de 30 personas, complica mucho más las posibilidades de lograr niveles de razonamiento superior.

Este escrito busca sensibilizar al docente, proporcionarle insumos que le permitan ver más allá la de la punta del Iceberg. En la medida que se logre esta sensibilización el docente empezará a planificar sus clases de una manera distinta, con un norte definido, objetivos claros y consciente de que lo que se enseña deber hacerlo bien, porque tiene relevancia.

El convencimiento debe partir desde lo esencial: ¿para qué se estudia la geometría? ¿Cuál es la problemática que engloba su estudio? ¿Con qué instrumentos se cuenta para diagnosticar y describir la problemática en mis grupos? Es importante hacer un análisis de las posibilidades de acceso a diferentes recursos para enseñar geometría y cómo éstos podrían potenciar la evolución de razonamiento en geometría a niveles superiores, aspecto que no se discutió en este escrito, pero que no se puede obviar.

Referencias y bibliografía

Abrate, R.; Delgado, G. & Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación (Online)*. Vol. 39, N°1. Recuperado el 22 de octubre de 2007 en http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Almeida, M. (2002). Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia. *Memoria de la tesis doctoral*. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Barcelona. Recuperado el 22 de octubre de 2007 en http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-1008102-120710//TOL119.pdf

Báez, R. & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática*. Vols. 12 al 16. Número extraordinario. pp. 67-87.

Barrantes, M. & Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobre la geometría Escolar. *Enseñanza de las Ciencias* 22 (2), 241-250.

Barrantes, M. & Blanco, L. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números*, 62. pp. 33-44.

Castiblanco, A.; Urquina, H.; Camargo, L. & Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores Ltda.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V.Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista Ciencias de la Educación*. Valencia, España. Año 6, Vol. 1, N°27, pp. 83-98.

Hernández, V. & Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado el 18 de octubre de 2007 en http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Jaime, A. (1995). ¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría? En A. Gutiérrez y A. Jaime, (Eds.) G*eometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*. London: Routledge Falmer. Pp. 121-139.

Lastra, S. (2005). Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas. Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Sociales, Escuela de Postgrado, Universidad de Chile. Santiago, Chile. Recuperado el 25 de junio de 2008 en http://www.cybertesis.cl/tesis/uchile/2005/lastra_s/sources/lastra_s.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Torregosa, G. & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (2). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México, D. F.

Tsijli, T. (1999). *Geometría Euclídea I*. San José, Costa Rica: EUNED.

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Tesis doctoral. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. (Traducción al español realizada en 1990 por el proyecto de investigación Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele, director Angel Gutiérrez).