CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2006, Año 1, Número 1.
.

LAS IDEAS DE PÓLYA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS[1]

Cristian Alfaro
crisalfaro2002@yahoo.es
Escuela de Matemática
Universidad Nacional

Resumen

Las principales ideas de G. Pólya son descritas: el método de los cuatro pasos, el papel del docente, la lógica del razonamiento plausible, cómo resolver un problema.

Abstract

We describe the principal ideas of G. Pólya: his four-step method, the rôle of the teacher, the logic of plausible reasoning, how to solve a problem.

Palabras clave

Educación Matemática, Pedagogía, Matemáticas.

George Pólya fue un gran matemático que nació en Budapest en 1887 y murió en Palo Alto California en 1985. A lo largo de su vida generó una larga lista de resultados matemáticos y, también, trabajos dedicados a la enseñanza de esta disciplina, sobretodo en el área de la Resolución de Problemas.

Estos trabajos básicamente fueron escritos en los años cuarenta del siglo XX pero fueron traducidos hasta los años sesenta y setenta.

Se trata de un personaje clave en la Resolución de Problemas y es considerado el pionero o gestor de las primeras etapas de esta temática.

La posición de Pólya respecto a la Resolución de Problemas se basa en una perspectiva global y no restringida a un punto de vista matemático. Es decir, este autor plantea la Resolución de Problemas como una serie de procedimientos que, en realidad, utilizamos y aplicamos en cualquier campo de la vida diaria.

Para ser más precisos, Pólya expresa: "Mi punto de vista es que la parte más importante de la forma de pensar que se desarrolla en matemática es la correcta actitud de la manera de cometer y tratar los problemas, tenemos problemas en la vida diaria, en las ciencias, en la política, tenemos problemas por doquier. La actitud correcta en la forma de pensar puede ser ligeramente diferente de un dominio a otro pero solo tenemos una cabeza y por lo tanto es natural que en definitiva allá sólo un método de acometer toda clase de problemas. Mi opinión personal es que lo central en la enseñanza de la matemática es desarrollar tácticas en la Resolución de Problemas".

---

[1] Este texto es una trascripción editada de una conferencia impartida por el **Master Cristian Alfaro**, el 25 de marzo del 2006 en un *Seminario Teórico*. La trascripción y edición preliminar de la misma fue realizada por el estudiante de la Universidad Nacional **José Romilio Loría**. El autor hizo la edición final.

Es interesante rescatar que esta idea no nació de la noche a la mañana, Pólya desde joven era una persona muy inquieta por la física y la matemática; le encantaba asistir a conferencias y a clases para observar la demostración de teoremas. En estas charlas o lecciones, a pesar de que la exposición de los conceptos era bastante clara, la inquietud de él siempre era: "sí, yo tengo claro el razonamiento, pero no tengo claro cómo se origina, cómo organizar las ideas, por qué se debe hacer así, por qué se pone de tal orden y no de otro". Esto lo llevó a cuestionar las estrategias que existían para resolver problemas o cómo se concebiría una sucesión de pasos lógicos para aplicar a la resolución de cualquier tipo de problema.

MÉTODO DE LOS CUATRO PASOS.

Él plantea en su primer libro el llamado "El Método de los Cuatro Pasos", para resolver cualquier tipo de problema se debe:

- comprender el problema
- concebir un plan
- ejecutar el plan y
- examinar la solución.

Para cada una de estas etapas él plantea una serie de preguntas y sugerencias.

1. Comprender el Problema.

Para esta etapa se siguen las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición?
- ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?
- ¿Es insuficiente?
- ¿Es redundante?
- ¿Es contradictoria?

Es decir, esta es la etapa para determinar la incógnita, los datos, las condiciones, y decidir si esas condiciones son suficientes, no redundantes ni contradictorias.

Una vez que se comprende el problema se debe

2. Concebir un Plan.

Para Pólya en esta etapa del plan el problema debe relacionarse con problemas semejantes. También debe relacionarse con resultados útiles, y se debe determinar si se pueden usar problemas similares o sus resultados (aquí se subraya la importancia de los problemas análogos). Algunas interrogantes útiles en esta etapa son:

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante?
- ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado?
- ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma?
- ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Una vez que se concibe el plan naturalmente viene la

3. Ejecución del Plan.

Durante esta etapa es primordial examinar todos los detalles y es parte importante recalcar la diferencia entre percibir que un paso es correcto y, por otro lado, demostrar que un paso es correcto. Es decir, es la diferencia que hay entre un problema por resolver y un problema por demostrar. Por esta razón, se plantean aquí los siguientes cuestionamientos:

- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?
- ¿Puede demostrarlo?

Él plantea que se debe hacer un uso intensivo de esta serie de preguntas en cada momento. Estas preguntas van dirigidas sobre todo a lo que él llama problema por resolver y no tanto los problemas por demostrar. Cuando se tienen problemas por demostrar, entonces, cambia un poco el sentido. Esto es así porque ya no se habla de datos sino, más bien, de hipótesis. En realidad, el trabajo de Pólya es fundamentalmente orientado hacia los problemas por resolver.

En síntesis: al ejecutar el plan de solución debe comprobarse cada uno de los pasos y verificar que estén correctos.

4. Examinar la Solución.

También denominada la **etapa de la visión retrospectiva**, en esta fase del proceso es muy importante detenerse a observar qué fue lo que se hizo; se necesita verificar el resultado y el razonamiento seguido De preguntarse:

- ¿Puede verificar el resultado?
- ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?
- ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Estas cuestiones dan una retroalimentación muy interesante para resolver otros problemas futuros: Pólya plantea que cuando se resuelve un problema (que es en sí el objetivo inmediato), también, se están creando habilidades posteriores para resolver cualquier tipo de problema. En otras palabras, cuando se hace la visión retrospectiva del problema que se resuelve, se puede utilizar tanto la solución que se encuentra como el método de solución; este último podrá convertirse en una nueva herramienta a la hora de enfrentar otro problema cualquiera.

De hecho, es muy válido verificar si se puede obtener el resultado de otra manera; si bien es cierto que no hay una única forma o estrategia de resolver un problema pueden haber otras alternativas. Precisamente, esta visión retrospectiva tiene por objetivo que veamos esta amplia gama de posibles caminos para resolver algún tipo de problema.

EL PAPEL DEL DOCENTE EN EL PROCESO

Un aspecto muy relevante en todo este proceso es la función que tiene el docente. Según Pólya, el papel del maestro es “ayudar al alumno”, pero esto debe ser entendido con mucho cuidado. Es difícil llevarlo a la práctica, porque en realidad esa ayuda, como dice él, no tiene que ser ni mucha ni poca; sin embargo, a veces, es un poco subjetivo determinar si el profesor está ayudando mucho o está ayudando poco. La ayuda que de un profesor debe ser la suficiente y la necesaria. Por ejemplo, no se puede plantear un problema muy difícil y abandonar al estudiante a su propia suerte pero, tampoco, plantear un problema y que el mismo docente lo resuelva. Si se hace lo último no se enseña nada significativo al estudiante; en otras palabras: es importante que el alumno asuma una parte adecuada del trabajo.

Hacer preguntas que se le hubieran podido ocurrir al alumno es, también, crucial en el proceso. Es por eso que Pólya plantea constantemente que el profesor debe ponerse en los zapatos del estudiante. Evidentemente, cuando el maestro propone un problema y sabe como se resuelve, presenta la solución de forma que todo parece muy natural. Sin embargo, el mismo estudiante cuestiona si realmente se le puede ocurrir a él esa solución. Allí surge una serie de circunstancias que apuntan al profesor como la única persona capaz de encontrar el mecanismo de solución para el problema:

- Preguntar y señalar el camino de distintas formas.
- Usar las preguntas para ayudar a que el alumno resuelva el problema y desarrollar en él la habilidad de resolver problemas.

Pólya recalca el interés

Según él, para resolver un problema lo que se tiene que tener fundamentalmente al inicio es interés de resolver el problema. La actitud que puede a matar un problema es precisamente el desinterés; por ello se debe buscar la manera de interesar al alumno a resolver problemas. Entonces, es relevante el tiempo que se dedique a exponer el problema: el profesor debe atraer a los estudiantes hacia el problema y motivar la curiosidad de los muchachos.

En ocasiones, el docente no encontrará progreso en el estudiante y, es probable se deba a que éste no tiene deseos de resolver el problema.

Un método que suele resultar útil es el de la imitación: el profesor debe ser un modelo para la Resolución de Problemas. Entonces, él mismo debe hacer las preguntas cuando resuelve un problema en la clase. Ahora bien, es importante preparar con cuidado los ejemplos, no se debe proponer ahí problemas que parezcan imposibles, sino que realmente sean adecuados y que se encuentren al nivel del estudiante.

La presentación de los problemas tiene, entonces, mucho peso en el proceso. No consiste en dar una lista interminable de ejercicios para que resuelvan y punto, de lo contrario: se trata de sembrar la curiosidad y el interés por el problema.

El método de interrogar del profesor.

El docente debe comenzar con una pregunta general o una sugerencia, ir poco a poco a preguntas más precisas hasta obtener respuestas de los alumnos; luego debe realizar preguntas y sugerencias simples y naturales.

En este libro de Pólya aparecen constantemente diálogos entre el profesor y estudiante, así como ejemplos de problemas. Uno muy interesante es acerca del cálculo de la diagonal de un paralelepípedo. En este problema Pólya sugiere que hay que llevar al estudiante a razonar y ver problemas análogos (como el de calcular una diagonal en un rectángulo), sin embargo acotaba: sería incorrecto que los profesores, con el afán de ayudar a los estudiantes, hagan sugerencias como, por ejemplo, preguntar si se puede aplicar el teorema de Pitágoras. Pólya dice que un pregunta en ese sentido sería deplorable. El estudiante que ya tiene clara la idea por donde va la solución va a ver muy natural que se va a emplear el teorema de Pitágoras; pero la persona que no ha tenido la comprensión clara del problema en ese momento va a decir: “se qué es el teorema de Pitágoras, pero ¿cómo se aplica en este problema?”

Esas preguntas parecen simples pero no son simples, tienen que ser conformadas con mucho cuidado. El insiste mucho en que sean preguntas simples, naturales, que se le puedan haber ocurrido a algún estudiante, que sean aplicables a todo tipo de problemas.

Este tipo de preguntas mencionan indirectamente las operaciones típicamente intelectuales que se van a utilizar en la Resolución de Problemas.

Características de las preguntas y sugerencias

La generalidad

Las preguntas y sugerencias no están restringidas a un determinado tema. Ya sea un problema algebraico o geométrico, una adivinanza, o cualquier tipo de situación que nosotros queramos enfrentar, Pólya plantea que las preguntas son aplicables. Señala que cualquier tipo de persona se puede interesar en la Resolución de Problemas. De manera especial, hace la comparación con los crucigramas en el periódico, los cuales, en realidad, suscitan el interés. Este tipo de acertijos, juegos, y enigmas no necesariamente contienen una aplicación directa en la vida real, pero estimulan el pensamiento. Esa curiosidad se debe trasladar a la matemática, para que sea algo natural también, y, por lo tanto, las preguntas deben ser generales (que se refieran a todo tipo de temas o situaciones).

El sentido común

Las preguntas tienen que ser naturales, sencillas: es lo que dice Pólya constantemente ver en la pregunta ¿cuáles son sus datos? ¿Cuáles son sus posiciones? En realidad, este tipo de preguntas aplican a cualquier ámbito del saber y no necesariamente a la matemática. Sugieren ellas una cierta conducta que debe presentarse en forma natural en la mente de cualquiera que tenga un cierto sentido común. Pólya hace mucho hincapié en que si no existe un verdadero interés en el problema es muy complicado poder resolverlo.

El objetivo de realizar una pregunta o sugerencia es evidentemente ayudar al alumno a resolver el problema en cuestión y, desde luego, desarrollar la habilidad de éste, de tal modo que pueda resolver por sí mismo problemas posteriormente.

¿CÓMO RESOLVER UN PROBLEMA?

El libro de Pólya hacia el final resulta repetitivo. Insiste mucho en empezar por el enunciado, visualizar el problema como un todo. Lo natural es que primero se deba **familiarizar con el problema** como un todo; esto estimula la memoria. Ya visualizado se tiene claro qué se tiene que resolver, y, una vez que suceda este proceso, se **comprende el problema**; aquí ya se aíslan las partes y se comienza a resolver por partes el problema.

Una idea útil: comenzar por lo principal, verlo desde diferentes perspectivas, conectarlo con conocimientos anteriores, buscar algo familiar y útil en lo que ha hecho antes. Si se tiene una idea incompleta se debe considerar a fondo. Verificar en qué la idea le pueda servir y en qué no, ayudará a concebir el problema en forma global.

Ejecución del plan: inicie con la idea que lo lleve a la solución cuando esté seguro de poder suplir todos los detalles. Asegúrese de que cada paso es correcto. Si es posible divida el proceso en pequeños y grandes pasos.

Visión retrospectiva: una vez que se resuelve el problema es importante no dejar de lado que siempre hay un aprendizaje para analizar lo que se hizo; evidentemente se aplica posteriormente. El mismo problema puede ser útil en otro problema, no solo por el tipo de problema sino por el método de solución.

LAS HEURÍSTICAS

La heurística moderna busca comprender el método que conduce a la solución de problemas: En particular, las operaciones mentales típicamente útiles en el proceso. Aquí debe tenerse en cuenta un trasfondo lógico y psicológico.

Pólya afirma que la selección de preguntas que se plantean para cada paso no se escogen al azar: existen aspectos lógicos y psicológicos relacionados entre sí para la formulación de dichas preguntas. En su libro aclara: téngase en cuenta que el autor tiene mucha experiencia en la enseñanza de las matemáticas y la Resolución de Problemas. No es fácil hacer preguntas en un orden muy definido; es claro que si esto sucede y no están al azar es porque proceden de la experiencia de muchos años de estar trabajando con eso.

Básicamente lo que plantea es: el estudio de la heurística busca obtener puntos comunes en cualquier tipo de problemas. Lo que se quiere obtener son las características generales, estrategias de resolución, independientemente del problema. El objetivo es comprender estas estrategias típicamente útiles en la Resolución de Problemas.

Algunas de esas heurísticas son las que a continuación se describen.

1- Variación del problema

El problema original se puede variar descomponiéndolo un poco y no necesariamente se debe enfocar directamente; se puede enfocar a un problema análogo. Separe partes, cambie alguna condición. Pólya afirma que eso genera un poco la movilización y la organización de los conocimientos, se llama a la movilización de ese conocimiento previo que tenemos, tal vez, por ahí escondido. Este último no necesariamente sale a flote a menos que empecemos a hacer variaciones y hacer cambios (que es cuando se empiezan a generar esos conocimientos previos).

2- Generalización

Al analizar un caso en particular se siente la necesidad de probar el problema en un caso más general: entonces, se generaliza un poco el problema con el que se esta trabajando. El método es pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos; entre los cuales figura el primero. O, por el otro lado, pasar del examen de un conjunto limitado de objetos a un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado.

3- Particularización

Es el caso inverso de la generalización: se tiene un problema general y se empieza a particularizar en algunos casos para encontrar alguna idea o alguna luz sobre el problema por resolver. Consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño (o incluso de un solo objeto) contenido en el conjunto dado.

4- Analogía

Para resolver un problema se puede utilizar la solución de un problema análogo más sencillo, ya sea usando su método, su resultado o ambos.

LA LÓGICA DEL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE

En su primer libro Pólya asegura que, en ocasiones, al trabajar se plantea un razonamiento que no es precisamente el silogismo que normalmente se usa. Se trata de un método de alumbramiento de muchas ideas: el *modus tollens*, que plantea que si A implica B, B es falsa entonces: A es falsa. Este es un tipo de razonamiento que es lógico y tiene sus características de **impersonalidad**, no depende de las personas. Todos pensamos distinto pero sí aceptamos las premisas, irremediablemente, aceptamos la conclusión. Es **universal.** Se aplica a cualquier ámbito del conocimiento. Es autosuficiente y no necesita de aspectos o elementos externos para obtener la conclusión. Es **definitivo**.

Sin embargo, Pólya plantea un razonamiento diferente: el **razonamiento plausible.** Este es así: si A implica B y B es cierto entonces A es más digna de crédito. Hace un hincapié en que esto, desde el punto de vista lógico, no es correcto y aceptarlo sería una locura, pero descartarlo sería aún una mayor locura. *Grosso modo*, en ambos casos las dos primeras premisas son igualmente claras y definitivas; están en el mismo nivel lógico. Las conclusiones están en diferente nivel lógico. En el caso demostrativo la conclusión está en el mismo nivel que las premisas, mientras que en el razonamiento plausible es menos fuerte. En sí, lo que quiere decir es: la matemática en su forma de exposición euclidiana tiene una estructura lógica bastante coherente y es “más científica” que cualquier otra ciencia natural. Sin embargo, en realidad el matemático, dice Pólya, razona de distintas maneras, no de una única forma: conjeturando, buscando relaciones. **Esa forma de razonar está actualmente oculta en la enseñanza de la matemática y eso es lo que él plantea que debe mostrársele al estudiante.**

Las características del razonamiento plausible

Es Impersonal: la verificación de una consecuencia fortalece la conjetura. Pero esta impersonalidad se logra solamente porque estos patrones son restringidos a un aspecto de la inferencia plausible. En cuanto queremos saber sobre la fuerza que da a la conjetura la verificación de una consecuencia, se presentan las diferencias personales.

Es Universal: la verificación de una consecuencia es una evidencia razonable de una conjetura en cualquier dominio. Pero esta universalidad se logra por la unilateralidad del patrón. Otra vez, esta universalidad se ve empañada cuando se trata de determinar cuál es el peso de la evidencia. Así, existen límites para la universalidad de la inferencia plausible.

Es Autosuficiente: la conclusión plausible está apoyada por las premisas. Pero carece de durabilidad. De hecho, otra vez, el peso de la evidencia depende de cosas no mencionadas en las premisas. La dirección está dada en las premisas (más o menos digna de crédito), pero la fuerza no. No depende de elementos externos.

Es Provisional (no definitivo): no se puede separar la conclusión de las premisas. Con las premisas la conclusión goza de sentido, pero puede disminuir su valor con el tiempo aún con las premisas intactas. Su importancia es transitoria. Puede aparecer un contraejemplo que elimina la conjetura.

En conclusión: un profesor de matemática debe tener en cuenta que un razonamiento presentado en forma correcta (lo que se llama la exposición euclidiana) con un método riguroso, puede no ser inteligible, ni instructivo. Esto sucede así si no se hace comprender el propósito de cada una de las etapas; es decir, si no se llega a comprender el modo por el cual se ha obtenido dicho razonamiento.

El profesor de matemáticas debe mostrar el rostro humano de esta disciplina: dónde se equivoca, dónde se conjetura, dónde las conjeturas se desechan o siguen ahí; si hay problemas abiertos en donde todavía no sabemos si tienen solución o no. Sería importante que muchos de esos aspectos pudieran incluirse en la enseñanza de la matemática.

REFERENCIAS

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, Alan. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws, Ed.). p. 334-370, [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2006 de:

http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html

INTERVENCIONES DEL PÚBLICO[2]

Edison De Faria

En primer lugar, quiero resaltar que, al final de la década de los setenta y de los ochenta, con el desarrollo de computadoras, la inteligencia artificial se interesó mucho por la resolución de problemas. La pregunta que emergió: ¿será que una máquina puede emular el comportamiento humano al resolver un problema? Simmon y sus colaboradores se fundamentaron en la teoría de Pólya.

Hemos visto una máquina, *Deep Blue*, que le ganó al campeón mundial de ajedrez. Este es un proceso de resolución de problemas. Se dan múltiples posibilidades y al final hay una explosión combinatoria. Ahora se desarrolla también un nuevo programa *Deep Blue* que ganaría más fácil a la anterior. Esto hace ver que la resolución de problemas va más allá de los seres humanos.

Otro aspecto es el del profesor como modelo. Por lo general y a veces es una mala costumbre que tenemos (he visto a muchos profesores hacer esto): cuando se tiene un problema se impacienta y hace una pregunta, menos de un minuto después él mismo da la respuesta. No espera que los estudiantes den la respuesta. No deja que piensen. Es una impaciencia porque ya sabe la solución. Eso es equivocado.

Es importante que, a veces, los estudiantes lleven un problema que uno no lo pueda hacer de inmediato, que uno tenga dificultades también para hacerlo. No hay lugar para la vergüenza, que se hagan intentos para que así los estudiantes vean cómo es que se aborda un problema nuevo, una situación en la que que no se tenga toda la “receta”. No se debe provocar que los estudiantes digan: “que profesor más carga, cómo se le ocurre hacer eso y a mi no se me ocurre”.

[2] Esta parte de la transcripción fue realizada por las estudiantes de la Universidad de Costa Rica: **Irene Soto, Rebeca Gu y Paola Gómez**.

Es mejor hacer que el aula de matemáticas simule un comportamiento como en la sociedad de los matemáticos, cómo piensa, cómo hace, cómo no viene la idea de inmediato. Aquí se tiene que estar haciendo un poco de empirismo, buscando patrones y cosas semejantes.

Mario Murillo

Un comentario histórico. Yo recuerdo que en la UCR, en mi condición de estudiante de enseñanza, efectivamente sí estudiamos el libro de Pólya, en alguna parte. Esto pudo haber sido a mediados de la década de los 70. Nosotros abordamos este libro. Lo comentamos en clase de alguna manera: ya teníamos desde el punto de vista didáctico un interés en llevar los problemas a la clase. Fue con Numa Sánchez. Este profesor estimulaba el desarrollo de didácticas propias en el estudiante. Daba sugerencias y no decía cómo debían resolverse las cosas.

También otro antecedente, en la enseñanza de las matemáticas, corresponde a un profesor de psicología, cuyo nombre no recuerdo. También se inclinaba por la línea de Piaget. Este otro profesor metía algunos elementos como las recomendaciones de Pólya. Esto afirma la existencia en el país de algunos antecedentes en esa línea de la Resolución de Problemas.

Edison De Faria

En algunas familias uno puede ver niños que tienen mucha habilidad para resolver problemas. ¿Será que existe algo especial en los genes para ser unos más aptos que otros en la resolución de problemas?

Andrea Morales

Antes en la exposición, se sugirió de parte de Pólya la existencia de solo un método para resolver todo tipo de problemas. Pienso que en su tiempo se suponía que el método científico era el único método conocido que servía para resolver todo tipo de problemas científicos. Y esto no parece conveniente.

Aquí se entiende la dificultad de otras ciencias (como las sociales) para afirmarse con su propio método. Entonces: ¿existe solo un método para abordar todo tipo de problemas? ¿En la forma absoluta como planteaba Pólya?

En esa dirección, podemos pensar en cómo dos chiquillos, dos hermanos, tienen la habilidad uno para el lado lógico-matemático, y otro la habilidad para poder resolver y cambiar su problema con un lado más humano, un lado más psicológico, el lado más social. Entonces eso va, también, un poco en relación con la supuesta existencia de ese método único y absoluto.

Cristian Alfaro

Pólya plantea que tenemos un método que sirve en distintos ámbitos, no solo, como uno se podría imaginar, para resolver problemas en matemáticas. Lo interesante de la cita, que hemos señalado de manera crítica, es que él plantea que sólo tenemos una cabeza y que en teoría todo tipo de problemas los enfrentamos de forma similar. Esa es la percepción de él. A mí me parece, que en ciertos aspectos generales de cualquier situación, uno sí busca patrones. En el caso mío: en cualquier tipo de problema usualmente uno trata siempre de actuar de forma muy particular, siempre de la misma forma aunque el problema sea distinto.

Ahora, en Ciencias Sociales, por ejemplo, nos topamos con un método de razonamiento, un método crítico. Sin embargo: lo que a mí me parece de la afirmación que analizamos, es que Pólya hace hincapié en que ese tipo de preguntas a final de cuentas es muy general, y sirve para abordar cualquier tipo de situación.

En realidad, lo que hay que señalar es que siempre se puede hacer ese tipo de preguntas sobre un problema, un juego, una adivinanza, un acertijo o un problema matemático de otra índole; este tipo de sugerencias o preguntas (ese tipo de introducir a las personas a empezar a resolver los problemas). Es una aproximación aplicable en general a muchos ámbitos como, en particular, las Ciencias Sociales.

Víctor Buján

Uno de los méritos de la presentación de Cristian Alfaro es que nos permite o nos va a permitir ver que la obra matemática y sus elementos conviven como una sola institución con los aspectos del autor de la obra.

Es sumamente interesante la intervención de Edison De Faria: cuando él dice que uno de los malos hábitos o una de las malas cosas que no debería de hacer el profesor es impacientarse y acabar resolviéndole al muchacho: «muchacho, quitá la '*x*' y poné '*2y*' y ya». Esto es así porque, a veces, uno se desespera. Pero resulta que éste es un problema que no es trivial, no es superficial; es vital, es dificilísimo. Esto porque cuando ustedes vayan a las aulas algún día a enseñar, van a descubrir que tienen un programa que desarrollar, que las lecciones no duran seis horas seguidas, sino que son de cuarenta y cinco minutos o cincuenta. De manera que el problema se las trae y es uno de los que se amerita abordar. Afortunadamente están aquí presentes los que pueden influir en el país para ver cómo lo enfrentamos.

Yo recuerdo que don Juan Félix Martínez, un profesor herediano muy querido y distinguido, nos ponía en la clase unas identidades trigonométricas, que yo juraría que no se pueden resolver a menos que usted supiera que había que hacer la sustitución de variables que sólo el autor del libro de texto conocía.

¿Cómo hacer en un caso de esos para no decir: «mirá, muchacho, lo que tenés que hacer es… mirá, vení acá ya. Y ya, ahora sí, seguí y ya resolviste.»? No es tan simple. Hay profesores muy prudentes y serios que acaban por hacer eso. Esto está en la obra de Brousseau. Es el problema del profesor que se desespera y dice «mirá, hacé tal cosa, trazá esta línea y ya, ves.»

Ángel Ruiz

Comparto un poquito la visión de Andrea en el sentido de que, probablemente, en la frase de Pólya sobre el método aplicable en diferentes ámbitos, se podría malinterpretar: en el sentido de que hay un solo método científico, un método único para resolver los problemas cognoscitivos. Y sabemos que las ciencias todas son distintas y los métodos de cada ciencia son diferentes. O sea, si uno hace, digamos, geología el método que usamos es totalmente distinto al que se usa en la química. Entonces: son estrategias metodológicas diferentes. Sin embargo, hay otras dimensiones del conocimiento que sí son comunes y eso, precisamente, es lo que Pólya está tratando de rescatar. Y, en realidad, hay más cosas comunes de las que uno imagina en cuanto a la resolución de problemas, porque todo se puede plantear como un problema.

Esto se puede traer al plano educativo. En este último plano, por ejemplo el programa de Corea en secundaria, al completar su secundaria, hacen unas pruebas bastante difíciles. Tienen dos áreas: lengua e indagación; y la indagación es matemáticas, ciencias naturales y ciencias sociales. O sea, todo junto. Aquí, es lo que quiero resaltar: la estrategia esencial que asumen como punto de partida transversal es la resolución de problemas. Entonces, es interesante mostrar cómo el tema de la resolución de problemas transgrede las fronteras disciplinarias. Si vemos la prueba internacional PISA en el año 2003, ésta se concentró, también, en la resolución de problemas. De manera general, en esa prueba vemos que los problemas escogidos no son matemáticos sino que son multidisciplinarios.

Entonces, si bien es cierto que existen aproximaciones diferentes en las ciencias distintas particulares algunas cosas pueden ser comunes. Yo creo que la resolución de problemas es una de ellas.

Contextos de descubrimiento y de justificación

La segunda observación es más general. En los años treinta un filósofo estableció una distinción muy importante en lo que llamó "Contexto de descubrimiento" y "Contexto de justificación". Hans Reichenbach era parte de lo que se llamaba el Círculo de Viena. El formó parte de una corriente filosófica muy famosa, sobre todo en el mundo anglosajón: el Neopositivismo. Según esta distinción: en una ciencia hay un **contexto de justificación** (y de comunicación diríamos nosotros), y otro de **descubrimiento** (y, más bien, de creación). En el primero, hay ciertas reglas y en, el segundo, hay otras reglas. Hasta la época de Pólya lo que se pensaba que se podía entender, lo importante, dentro de la epistemología (la teoría del conocimiento), era el contexto de justificación.

¿Qué es el contexto de justificación en matemáticas? Las pruebas, las demostraciones, la lógica. Es evidente que no se puede comunicar a otro matemático un conjunto de estrategias heurísticas, porque eso es muy difícil. ¿Qué debe hacer? Esencialmente transmitir sus demostraciones, con sus pasos, criterios y parámetros de demostración o de rigor. ¿Es eso matemáticas o eso no es matemáticas? Lo que ha sucedido en los últimos sesenta años, es una comprensión de que esa parte es una parte de las matemáticas, pero no es la parte que construye las matemáticas. Un matemático profesional cuando está creando una teoría o llegando al resultado, no se coloca en el terreno de hacer las demostraciones lógico-matemáticas y todo el arsenal que hay ahí. Cuando va a demostrar que un límite existe, un ejemplo, no empieza con epsilons y deltas. Ese sería un proceso de justificación importante **en la comunicación de esa disciplina**. Pero nada más. Lo que hace Pólya, en alguna medida, es decir: hay que trabajar el contexto de descubrimiento. Ahí establece algunas cosas importantes: una de ellas, las heurísticas.

Conjeturas y lo que enseñamos en el aula

Otra cosa importante es el elemento de las conjeturas. El matemático funciona con conjeturas y trabaja con intuiciones y después ve cómo demuestra. Ahí no le sirve tanto el *modus pollens*. Le sirve más cuando tiene que justificar y comunicar a la comunidad de matemáticas. En la construcción lo que le sirve es el "bateo", así de simple: "batear", conjeturar, "ver cómo le llega" y fallar. Eso es importante. Eso es lo que encontramos en Pólya.

Esto último es sustancial en la educación. ¿Qué enseñamos nosotros en las clases usualmente? ¿Con qué visión todavía enseñamos? No con la visión de conjeturas, de intuiciones, de "ensuciarse", de que las matemáticas son erróneas a veces, y que hay errores. Solemos enseñar con la otra visión, la del contexto de justificación. Esta última visión es la que aportó toda una perspectiva axiomática formalista, *apriorística* de la naturaleza de las matemáticas.

Toda esta discusión hay que colocarla aquí. Pólya estaba haciendo algo muy importante porque estaba diciendo: las matemáticas se construyen de esta otra forma y la enseñanza tiene que seguir las reglas de la construcción matemática, no solamente reglas de la justificación o la comunicación de las matemáticas. Creo que esto es fundamental para que nos entendamos.

Una siguiente fase en Pólya es aquella cómo particulariza estas ideas en su famoso libro sobre el razonamiento plausible.

Resumimos: aquí tenemos una propuesta de visión sobre lo que son las matemáticas y sobre lo que lo que debe ser la enseñanza que le corresponde.

Edison De Faria

Esto es importante. Si viniera esa postura de un educador, nadie lo respetaría. Pero viene de Pólya, un matemático de prestigio. Los matemáticos tienen que poner cuidado a este Pólya, no solo al famoso por sus muchos resultados matemáticos importantes. Pólya se arriesgó: como matemático tomó él riesgo; y, por eso, debe atribuírsele más valor todavía.

Andrey Zamora

Habría que hacer la distinción entre lo que es un ejercicio y un problema. Cuando Ángel Ruiz decía que no podía darle un problema difícil a un estudiante ni tampoco muy sencillo, es también un llamado a adecuar las cosas. ¿Qué es problema para un estudiante? ¿Qué es un problema para nosotros como profesores? Lo que Ángel Ruiz y Edison De Faria decían sobre el profesor que al hacer su exposición hace una pregunta y un minuto después, casi inmediatamente, la contesta, es también debido a la extensión grande de un programa que tiene que cubrir.

Me parece que en CONARE hay un documento sobre el tiempo que se dedica en otros países a la docencia, pues en algunos países se dedica menos de la mitad de la jornada a dar la clase, se usa el otro tiempo para capacitarse y para investigar. En Costa Rica no se dan esas oportunidades.

Uno le pregunta a los profesores: ¿usted se animaría a resolver un problema frente a los muchachos sin haberlo estudiado previamente? La respuesta es negativa. Lo que se hace, en cambio, es que se toma un problema con mucho potencial y se lo presenta como un ejercicio más. Entonces, el estudiante percibe eso y plantea: ¿cómo tengo que hacerlo? ¿Qué pasos tengo que seguir? ¿Qué algoritmos debo seguir? Los problemas no son así.

Ángel Ruiz

Andrey Zamora se refiere a un libro mío que va a salir pronto publicado: *Universalización de la Educación Secundaria y Reforma Educativa*. Este contiene información detallada de varios Sistemas Educativos. Los datos exactos están en la red en estos momentos (en el programa Estado de la Nación).

Un ejemplo: en Japón la jornada de un profesor de secundaria y de primaria es del orden de cincuenta horas a la semana. Es decir, muy amplia. Sin embargo, solo se pasa entre quince y veinte horas de estas cincuenta horas en el aula con el alumno. Hay dentro de la jornada otro tipo de actividades, ya sea en la institución o fuera de la institución. Entonces: existe una clara diferencia. ¿Qué sucede en el tiempo que no se está en el aula? El educador hace investigación, se forma, se capacita, hace trabajos específicos en la organización de cada lección. Esto eso es lo común en varios países desarrollados, mientras que nosotros: … cuarenta y dos, cuarenta y siete lecciones en el aula.

En estos países, también, hay una diversidad de materias. Lo interesante es que en la mayoría de esos países también sucede otra cosa: en general, no trabajan más de doscientos días (algunas con mucho menos, Bélgica Francesa). Lo que sucede es que cada día de esos, es más largo y se utiliza el tiempo diferente. Además, estamos hablando de un espacio con contextos culturales diferentes, en las familias, en las ciudades, con las bibliotecas, espacios culturales y educativos, etc. No es como Costa Rica. Aquí usted va a Upala, por ejemplo, ¿si no está en el colegio, donde está? ¿En el parque? ¿La plaza? ¿Con los amigos viendo tele? Lo más probable: perdiendo el tiempo. No hay, en general, contextos culturales amplios mejores que la escuela y el colegio. Son circunstancias sociales diferentes. Pero sí hay variables de esas que son muy interesantes de tomar en cuenta y que cambian drásticamente la percepción que uno tiene sobre esos temas.