CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2006, Año 1, Número 1

MATEMÁTICAS Y RAZONAMIENTO PLAUSIBLE

Hugo Barrantes
www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes
Centro de Investigaciones Matemáticas
y Meta-Matemáticas, UCR
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, UNED

Resumen

Se analiza el concepto de razonamiento plausible desarrollado por G. Pólya. Para ello se recorre el análisis de inducción, analogía, patrones heurísticos, crédito de una conjetura, y la relación de esta línea de pensamiento con la educación matemática.

Abstract

We analyze the concept of plausible reasoning developed by G. Pólya. To this end we use induction analysis, analogy, heuristic patterns, conjecture credit, and the relationship between this line of thought and mathematics education.

Palabras clave

Educación Matemática, Matemáticas, Pedagogía

Pólya introduce el término "heurística" para describir el arte de la resolución de problemas, en *How to solve It* y lo desarrolla ampliamente en sus trabajos posteriores: *Mathematics and plausible reasoning* (1954) y *Mathematical discovery,* publicada en dos volúmenes (1962, 1965). En ellas amplía sus conceptos sobre la heurística y hace un análisis de lo que él llama razonamiento plausible desde el punto de vista de las probabilidades.

Para Pólya, la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas, de manera que los estudiantes tienen que adquirir el sentido de la matemática como una actividad; es decir, sus experiencias con la matemática deben ser consistentes con la forma en que la matemática es hecha.

Por otra parte, piensa que la matemática se presenta como un juego de imaginación en el que se debe imaginar un teorema matemático antes de probarlo y luego hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Por esta razón dice que si aprender matemáticas tiene algo que ver con el descubrimiento en esta disciplina, los estudiantes deben tener la oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.

Esta imaginación de teoremas puede verse como la proposición de conjeturas que deben ser aceptadas o rechazadas. La aceptación, desde luego, está sujeta a encontrar una prueba; el rechazo, a la *explicitación* de un contraejemplo. En el proceso, la conjetura puede ir ganado o perdiendo credibilidad según se vayan dando las circunstancias en el conocimiento alrededor de ella. Este perder o ganar credibilidad está relacionado con el razonamiento plausible.

En la primera parte de su obra *Mathematics and plausible reasoning*, expone sus ideas acerca del papel de la inducción y la analogía en matemáticas y refuerza sus argumentos a través de abundantes y detallados ejemplos.

LA INDUCCIÓN

En primer lugar, establece que la experiencia modifica las creencias humanas y que aprendemos de ella. El procedimiento del científico para tratar con la experiencia es la inducción, que empieza con algunas observaciones que pueden llevar a una conjetura, sugerida, precisamente, por la observación de ejemplos particulares. Tal conjetura es un juicio general sugerido por dichos ejemplos.

Siguiendo un proceso esquematizado por: observación de analogías – generalización–especialización, establece que la observación de analogías puede llevarnos a conjeturar una generalización y, volviendo a casos particulares, podemos obtener más crédito para la conjetura si ésta se verifica en estos nuevos casos particulares. Esto es, la conjetura se hace más plausible o más digna de crédito. En resumen: *un juicio general y conjetural adquiere más crédito si se verifica en un nuevo caso particular*.

Para lo anterior se debe tener una actitud inductiva; es decir, hay que ser capaz de adaptar nuestras creencias y experiencias, tan eficazmente como sea posible, a la luz de nuevos hechos. Para ello se requiere de:

- *Coraje intelectual*, que es estar dispuesto a revisar cualquiera de nuestras creencias.
- *Honestidad intelectual*, que es la capacidad de cambiar una creencia cuando hay razón compulsiva para ello.
- *Sabia contención*, que se refiere a cambiar las creencias solamente si hay una buena razón para ello.

LA ANALOGÍA

La analogía, concebida como una especie de semejanza sobre un nivel conceptual, en el sentido de que dos sistemas son análogos si concuerdan en relaciones claramente definibles de sus partes respectivas, parece tener participación en todos los descubrimientos y, en algunos, es la parte más importante. En relación con esto establece que *una conjetura adquiere más crédito con la verificación de una nueva consecuencia* y, además, *una conjetura alcanza más crédito si una conjetura análoga adquiere mayor crédito*.

Una evidencia es la verificación de un nuevo caso particular o la explicitación de una nueva pista que lleve a reforzar una conjetura. Estas evidencias pueden tener mayor o menor fuerza dependiendo del conocimiento de la persona que reciba la evidencia. Si quien la recibe conoce una prueba o un contraejemplo de la conjetura, la evidencia no alterará su creencia puesto que ya él la sabe válida o falsa. Pero si conoce algo parecido, su creencia puede ser modificada. El peso de la evidencia puede ser relativamente medido por: el número de verificaciones, la precisión de la predicción (la verificación de una más precisa le da más peso que la de una menos precisa), la verificación o rechazo de conjeturas rivales; esto es, conjeturas que en algún sentido se oponen a la conjetura que se está analizando.

Para Pólya, el papel de la intuición es muy importante y establece que primero hay que intuir y luego probar.

PATRONES HEURÍSTICOS

En la segunda parte de su trabajo Pólya compara patrones demostrativos con patrones heurísticos correspondientes y establece reglas para el trabajo con los patrones heurísticos.

En primer lugar compara el patrón de razonamiento clásico, *modus tollens* del silogismo hipotético con lo que él denomina el patrón fundamental inductivo. El *modus tollens* sigue el patrón (la línea horizontal significa “luego”):

A implica B
B es falsa
A es falsa

Esto es, si A fuera una conjetura que implica a B, entonces, si uno encuentra que B es falsa, eso desecharía la conjetura A, porque ella sería falsa. Pero sucede que si B fuese verdadera, no hay conclusión demostrativa; esto es, no podemos decir que A sea verdadera. Pero, según Pólya, aunque la verificación de la veracidad de B no prueba que la conjetura A es verdadera, sí la hace más digna de crédito. Esto sigue un patrón de inferencia plausible:

A implica B
B es verdadera
___
A es más digna de crédito

Esto quiere decir que si, en un principio, tenemos la conjetura A que implica una proposición B y luego probamos que B es verdadera, entonces, después de esa prueba, la conjetura A tiene que parecernos más creíble que antes de la prueba de B. A este patrón lo llama *patrón fundamental inductivo*. Pólya va más allá y dice que este patrón puede encontrarse, sin duda, en diferentes circunstancias de nuestra vida. Por ejemplo, en la ciencia, en los tribunales de justicia, etc.

FACTORES QUE AUMENTAN O DISMINUYEN EL CRÉDITO DE UNA CONJETURA

Amplía este patrón indicando que la verificación de ciertas consecuencias fortalece nuestra creencia en la conjetura más que la verificación de otras. En particular, pesa más la verificación de una consecuencia entre más difiera esta consecuencia de las consecuencias previamente verificadas. Por el contrario, si la nueva consecuencia es muy semejante a las ya verificadas, no aporta nada significativo a nuestra creencia en la conjetura.

Por otra parte, la verificación de una consecuencia poco probable en sí misma acrecienta más la creencia en una conjetura que la verificación de una consecuencia muy probable en sí misma.

El otro asunto que puede modificar nuestra creencia en una conjetura de modo positivo es la verificación de la veracidad de una conjetura análoga. De modo semejante, si una conjetura análoga se hace más digna o menos digna de crédito, nuestra conjetura variará en el mismo sentido (se hará más o menos digna de crédito).

Un segundo asunto: si tenemos una conjetura A y encontramos una conjetura B de la que sigue A, es decir, que "A está implicada en B". Es evidente, de acuerdo con el *modus ponens* del silogismo hipotético que si B es verdadera entonces A también lo es. Pero si B es falsa, no podemos decir nada de A, pero, desde el punto de vista heurístico A pierde crédito. Tenemos los siguientes patrones:

Demostrativo	*Heurístico*
A implicada en B	A implicada en B
B cierta	B falsa
A cierta	A menos digna de crédito

Contrario a esto se presenta la siguiente situación: si la proposición B es incompatible con nuestra conjetura A, entonces, en caso de que B sea cierta entonces A tiene que ser falsa; pero, si B fuera falsa, nuestra conjetura A, que es incompatible con ella, adquiere más crédito. Los patrones son los siguientes:

Demostrativo	*Heurístico*
A incompatible con B	A incompatible con B
B cierta	B falsa
A falsa	A más digna de crédito

Los patrones demostrativos segundo y tercero pueden deducirse del primero (*modus tollens*) sustituyendo las proposiciones correspondientes por proposiciones equivalentes. Sin embargo, es claro, que no se pueden derivar, por pura lógica formal, los patrones heurísticos segundo y tercero del primero. Sin embargo, si consideramos como equivalentes "no-A más digna de crédito" y "A menos digna de crédito" sí podemos hacer una derivación semejante de los patrones 2 y 3, a partir del primero. Esto lleva a Pólya a establecer un cierto paralelismo entre la lógica formal sustentada en los patrones demostrativos y lo que podríamos denominar como lógica heurística sustentada en los correspondientes patrones heurísticos.

LA LÓGICA DEL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE

En el penúltimo capítulo de *Mathematics and plausible reasoning*, Pólya se propone indagar sobre la naturaleza de la relación entre las claras y estrictas reglas de la lógica formal y las probabilidades y los patrones del razonamiento plausible.

Hace un análisis del *modus tollens* del silogismo hipotético:

A implica B
<u>B falsa</u>
A falsa

Encuentra que:

(a) **Es impersonal**: La validez del razonamiento no depende del razonador.

(b) **Es universal**: Los enunciados considerados pueden pertenecer a cualquier campo del conocimiento y se pueden referir a cualquier objeto del pensamiento humano suficientemente claro.

(c) **Es autosuficiente**: La conclusión solo depende de las premisas y nada puede invalidarla si las premisas son sólidas. Es el rasgo más notable del silogismo.

(d) **Es definitivo**: Si las premisas son incontestablemente ciertas, entonces se puede separar la conclusión del silogismo y ésta quedará como posesión mental definitiva.

Lo mismo puede decirse de los demás silogismos. Esto simboliza el carácter general del razonamiento demostrativo. Compara el *modus tollens* con el siguiente patrón de razonamiento plausible:

A implica B
B cierta
A más digna de crédito

En ambos casos las dos primeras premisas son igualmente claras y definitivas; están en el mismo nivel lógico. Pero las conclusiones están en diferente nivel lógico. En el caso demostrativo la conclusión está en el mismo nivel que las premisas; la conclusión en el patrón de razonamiento plausible es menos fuerte. Compara la conclusión plausible con una fuerza: tiene magnitud y dirección. Empuja en cierta dirección y con cierta fuerza. La dirección está implicada en las premisas por lo tanto **es impersonal**; la fortaleza no, entonces puede ser impersonal.

La conclusión del razonamiento plausible parece **unilateral**; solo expresa un aspecto y descuida los otros. Establece que:

(a) **Es impersonal**: La verificación de una consecuencia fortalece la conjetura. Pero esta impersonalidad se logra solamente porque estos patrones son restringidos a un aspecto de la inferencia plausible. En cuanto queremos saber sobre la fuerza que da a la conjetura la verificación de una consecuencia, se presentan las diferencias personales.

(b) **Es universal**: La verificación de una consecuencia es una evidencia razonable de una conjetura en cualquier dominio. Pero esta universalidad se logra por la unilateralidad del patrón. Otra vez, esta universalidad se empaña cuando se trata de determinar cuál es el peso de la evidencia. Así, existen límites para la universalidad de la inferencia plausible.

(c) **Es autosuficiente**: La conclusión plausible está apoyada por las premisas. Pero carece de durabilidad. De hecho, otra vez, el peso de la evidencia depende de cosas no mencionadas en las premisas. La dirección está dada en las premisas (más o menos digna de crédito), pero la fuerza no.

(d) **Es provisional (no definitivo)**: No se puede separar la conclusión de las premisas. Con las premisas la conclusión goza de sentido, pero puede disminuir su valor con el tiempo aún con las premisas intactas. Su importancia es transitoria.

En resumen la unilateralidad del patrón de razonamiento plausible deja un amplio margen para el desacuerdo en cosas de importancia. Por otra parte, el razonamiento demostrativo es preciso, final y automático; el razonamiento plausible es vago, provisional y específicamente "humano". La inferencia plausible deja indeterminado el "peso" de la conclusión. Concluye que:

> "Sería locura lamentar que en varios aspectos nuestro patrón de razonamiento plausible no llegue a la perfección del razonamiento demostrativo… Desde el comienzo quedó claro que las dos clases de razonamiento tienen tareas diferentes... En oposición a la inferencia demostrativa, la inferencia plausible deja indeterminada una cuestión de gran importancia: la 'fuerza' o el 'peso' de la conclusión. Este peso puede depender no solo de bases claras como las expresadas en las premisas, sino

también de bases que no están expresas ni aclaradas y pertenecen a la persona que saca la conclusión." (Polya, 1966, pp. 413-414)

GRADO DE CREDIBILIDAD DE UNA CONJETURA

Posteriormente pasa a formular el razonamiento plausible en términos del cálculo de probabilidades. Esto hace que los patrones de razonamiento plausible sean considerados como "reglas de admisibilidad en la discusión científica". Aplica las reglas de las probabilidades a este razonamiento de un modo *cualitativo*.

Denota con Pr{A} la **credibilidad** (la fuerza de la evidencia) de la conjetura A y establece una dificultad: no conocemos ninguna definición operacional de *credibilidad de la conjetura* A. La interpretación de credibilidad y del símbolo Pr{A} debe soslayar la falta de tal definición operacional, de manera que se pueda considerar las reglas de razonamiento plausible de modo sistemático y realista.

Más que un asunto numérico, Pr{A} es un asunto de grado; de hecho, Pr{A} puede aumentar o disminuir entre 0 y 1 si se consideran argumentos adicionales.

Pr{A}=0 si la conjetura es falsa y es 1 si es verdadera. Denota con Pr{A|B} el grado de credibilidad de la conjetura A si B fuese verdadera. Aplicando diferentes teoremas sobre probabilidades verifica los patrones de razonamiento plausible que ha obtenido a lo largo del libro.

Pólya aplica las probabilidades al estudio de la inferencia de un modo cualitativo dada la imposibilidad, que él mismo explica, de hacerlo de modo cuantitativo.

EL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE Y LA ENSEÑANZA MEDIANTE PROBLEMAS

Finalmente, indaga sobre el papel del razonamiento plausible en el descubrimiento de una solución o en la invención de una prueba.

En primer lugar, acepta que "resolver un problema es un proceso extremadamente complejo. Ninguna descripción o teoría de ese proceso puede agotar sus múltiples aspectos; cualquier descripción o teoría del mismo está abocada a ser incompleta, esquemática y muy simplificada." Pero se propone "señalar el lugar del razonamiento plausible en este complejo proceso". Señala algunos aspectos a tener en cuenta:

(1) *Proponiéndonos un problema a nosotros mismos*. Este es el principio de la solución. Debemos hacer nuestro el problema.

(2) *Atención selectiva*. La mente se hace selectiva; recoge cualquier observación que puede serle útil en la solución del problema y cierra la puerta a lo demás. El problema nos absorbe.

(3) *Registrando la marcha del progreso*. Se siente la marcha del progreso; su mente clasifica lo que le llega, tiene idea de lo que puede servir y lo que no. Estos sentimientos guían su esfuerzo.

(4) *Dónde empieza el razonamiento plausible*. Cuando comienza a dudar de sus progresos. Cuando se pregunta si el comienzo fue bueno o si va en la dirección correcta. Ahí empieza a analizar sus sentimientos: "la dirección parecía totalmente plausible – pero ¿por qué es plausible?"

Establece que la forma de presentación científica de un resultado matemático oculta el razonamiento heurístico que se ha realizado para llegar a él. Desde el punto de vista del aprendizaje, este razonamiento heurístico es, sin embargo, lo más importante.

Agrega algunas indicaciones para el profesor. Dice que "el resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición.” Esto lo lleva a establecer que tiene que haber un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas. En resumen, dice que:

- La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto de ella.
- No se deben suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante.
- El profesor debe intentar darse cuenta de lo que los estudiantes esperan, apuntará hacia lo que razonablemente esperan.
- El profesor debe enfatizar que la intuición en las matemáticas tiene que ser razonable, respetable y responsable.
- Aconseja que “¡enseñemos intuyendo!”

Debe enseñarse tanto las pruebas como la intuición; el razonamiento demostrativo y el razonamiento plausible. Pero al estudiante debe quedarle claro la diferencia entre una prueba y una intuición; entre una intuición más razonable y otra menos razonable. Afirma que hay casos en que es más importante enseñar a intuir que enseñar a demostrar; por ejemplo en los cursos de cálculo para estudiantes de ingeniería.

Sin embargo, reconoce que enseñar intuyendo no es fácil y no pretende tener un método infalible para hacerlo. Pero también indica que no es imposible hacerlo (enseñar intuyendo). Sugiere al profesor utilizar los motivos heurísticos que justifican ciertos pasos en las demostraciones y en la solución de problemas; esto ayuda a los estudiantes.

Propone al profesor algunos tipos de problemas que puede utilizar con el propósito de desafiar a los estudiantes y “descansar de la monotonía y de la rutina de los problemas que llenan los libros de texto”:

- *Intuición y prueba*: dar al estudiante la oportunidad de hacer problemas en que primero intuya y luego pruebe algunos hechos matemáticos a un nivel apropiado.
- *Prueba de consecuencias*: Examinar el enunciado general probando sus consecuencias particulares. Este procedimiento inductivo es de uso diario en la investigación matemática y podría usarse a menudo en clase.
- *Intuición errónea*: Dar al estudiante la oportunidad de intuir aún a riesgo de equivocarse.
- *Teoría en pequeña escala*: Se trata de discutir problemas relativamente elementales que arroje luz sobre problemas no tan elementales.

INFLUENCIA Y CRÍTICAS

Los escritos de Pólya han servido de inspiración para numerosos trabajos e investigaciones en diversos campos tales como psicología, cognoscitivismo, inteligencia artificial, filosofía de la ciencia y, desde luego, educación matemática.

Los psicólogos y los cognoscitivistas estudian el desarrollo y validación de las teorías del aprendizaje humano. Particularmente, la ciencia cognoscitiva tiene relevancia en la simulación por computadora de la resolución de problemas. Se trata de simular, mediante programas computaciones, una secuencia de comportamientos similares a la secuencia que haría un ser humano. Estas simulaciones pueden ser utilizadas para entender más cabalmente la resolución de problemas matemáticos.

También se considera pionero el trabajo de Pólya en la inteligencia artificial, aunque parece que sus propuestas particulares no han tenido gran impacto en ese campo. Esto se debe fundamentalmente a que la noción de heurística varía de uno a otro campo. Mientras que en matemáticas se identifica con el descubrimiento de teoremas o de soluciones a problemas, en inteligencia artificial se relaciona con acciones específicas, como el diseño de estrategias de búsqueda inteligente (Atocha Aliseda).

Por otro lado, el trabajo de Pólya se reconoce como la base de estudios en filosofía de la ciencia; en particular de las ideas de Imre Lakatos en "Pruebas y Refutaciones". Lakatos expresa que el propósito de su ensayo es aproximarse a algunos de los problemas de la *metodología de las matemáticas*, utilizando el término "metodología" con el sentido que Pólya y Bernays le dan al término "heurística" y Popper a "lógica del descubrimiento". Lakatos argumenta (usando ejemplos históricos de descubrimiento en matemáticas) que aunque no hay una lógica del descubrimiento, sí hay una lógica falible del descubrimiento, la lógica del progreso científico, que no es ni psicología ni lógica, sino una disciplina independiente, *la lógica de la heurística.* Lakatos sostiene que el estilo heurístico enfatiza la situación problema: enfatiza la "lógica" que da nacimiento al nuevo concepto (Lakatos, 1979).

Por otra parte, en Educación Matemática se trata de determinar la forma cómo los estudiantes interactúan con las matemáticas y, ver de qué manera la resolución de problemas mediante el razonamiento heurístico puede utilizarse como un medio potenciador de la eficacia del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Algunos autores como Vilanova *et al*, han señalado algunas de las dificultades que podrían tener los docentes si quieren enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas, tal como lo plantea Pólya. Desde el punto de vista matemático, los docentes deben percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones que realizan los alumnos, poder discernir si éstas son fructíferas o no y qué podrían hacer en lugar de eso. Pedagógicamente, el docente debe decidir cuándo intervenir, qué sugerencias ayudarán a los estudiantes, sin impedir que la resolución siga quedando en sus manos, y realizar esto para cada alumno o grupo de alumnos de la clase. Personalmente, porque el docente estará a menudo en la posición (inusual e incómoda para muchos profesores) de *no saber*. Trabajar bien sin saber todas las respuestas, requiere experiencia, confianza y autoestima (Vilanova *et al*).

Más recientemente, por ejemplo, Anderson Norton presenta, siguiendo las ideas de Pólya, Fann y Lakatos, dos posibles modelos desarrollados a partir de experimentos con estudiantes de décimo grado, que describen cómo la abducción y asimilación sirven a menudo como medio de conjeturas en el estudio de la geometría (Norton).

Una de las críticas que le hacen algunos matemáticos y lógicos a las ideas de Pólya sobre el razonamiento plausible es que si la conclusión de una forma argumentativa no es certera, entonces de poco sirve. De hecho, al silogismo heurístico antes presentado se le conoce más popularmente como *la falacia de afirmar el consecuente*. La conclusión de este silogismo heurístico no es certera, es solo una pista, una hipótesis que puede ser confirmada o refutada con información adicional. Ante esto, pensamos que las ideas de Pólya sobre el razonamiento plausible son tremendamente importantes como una forma de enfocar el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas puesto que proporciona al estudiante herramientas que le permiten investigar patrones y relaciones de tipo matemático.

Más recientemente, estas formas de razonamiento han sido reivindicadas en el estudio de lógicas no-monótonas, estas son lógicas no clásicas que se han diseñado principalmente en la rama lógica de la inteligencia artificial, para modelar lo modos de razonamientos humanos. En estas lógicas se intenta capturar nociones como "A es más creíble", "A normalmente implica B" de un modo cualitativo. Aunque el análisis que da Pólya a los patrones de razonamiento plausible es probabilístico, puede considerarse como pionero en el estudio de las lógicas no-monotónicas.

REFERENCIAS

Lakatos, I. (1979). *Proofs and Refutations*. Cambridge: University Press.

Norton, A. Student conjectures in geometry. [En línea]. Recuperado el 10 de Mayo de 2006 de http://jwilson.coe.uga.edu/emt668/EMT668.Folders.F97/Norton/Papers/PME.doc

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, Alan. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws, Ed.). p. 334-370, [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2006 de:

http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html

Stanic, G. & Kilpatrick, J.(1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assesing of mathematical problem solving* (Charles & Silver, Eds.). pp.1-22. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vilanova, Silvia; Rocerau, María; Valdez, Guillermo; Oliver, María; Vecino, Susana; Medina, Perla; Astiz, Mercedes; Álvarez, Estella (2001). "La Educación Matemática El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje". *Revista Iberoamericana de Educación*, OEI. Versión en línea. Recuperado el 18 de marzo de 2006 de:

http://www.campus-oei.org/revista/deloslectores/203Vilanova.PDF