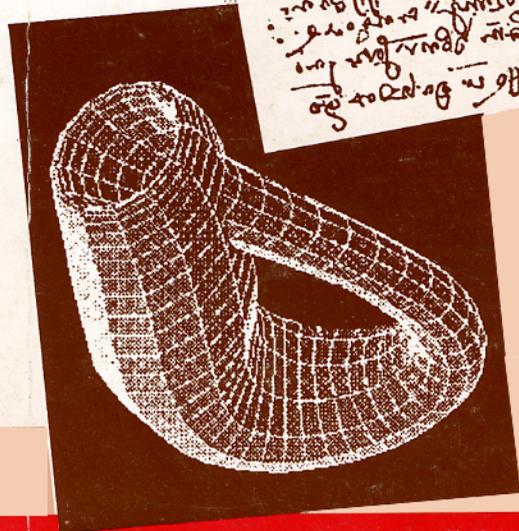
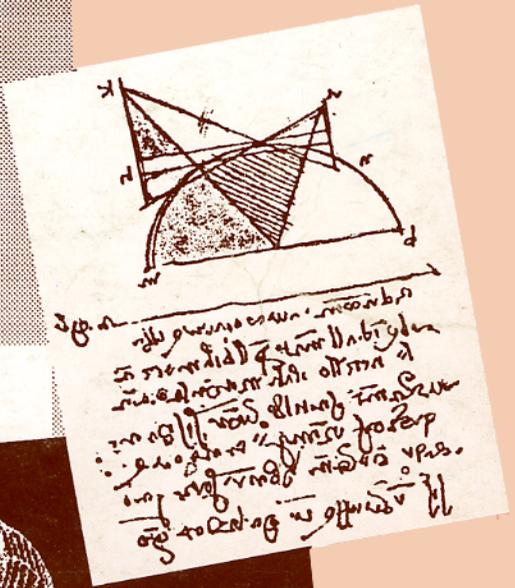
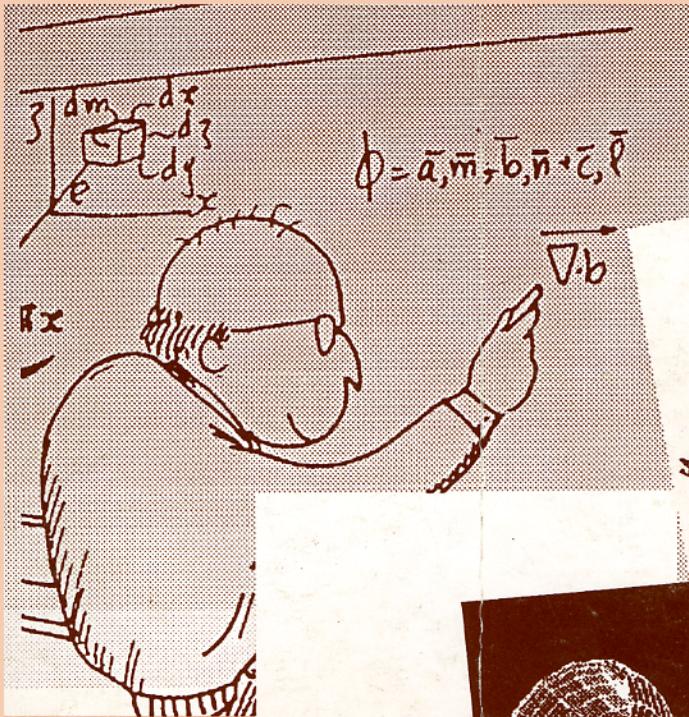


Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica
ENERO/JUNIO 1993 VOLUMEN 3 No. 1



¿SON TODOS LOS CONTROLADORES PID IGUALES?

Víctor M. Alfaro*

RESUMEN

Se presentan las diferentes ecuaciones utilizadas por los fabricantes para realizar sus controladores PID. Se dan ecuaciones para la conversión de sus parámetros. Se analiza el efecto de la interacción en los controladores PID serie. Se indica el tipo de controlador supuesto por varios métodos de ajuste.

SUMMARY

Equations used by manufacturers to implement their PID controllers are presented. Conversions for the controller parameters are given. The interaction between modes in a serial controller is analyzed. The controller assumed by several controller tuning methods are indicated.

INTRODUCCION.

La pregunta que da título a este artículo pareciera no tener sentido, dado que la mayoría de los libros de texto de control automático y control de procesos, utilizan las mismas ecuaciones para representar un controlador proporcional-integral-derivativo o simplemente controlador PID. Lamentablemente la realidad es muy distinta, ya que la forma en que la mayoría de los fabricantes de controladores industriales, realizan el algoritmo PID, difiere sustancialmente de estas ecuaciones ideales.

La evolución de los controladores industriales ha sido larga. El primer controlador neumático¹, puramente proporcional, fue el Taylor Modelo 10R creado en 1930. En 1934 Foxboro introdujo el proporcional-integral, Modelo 40, y en 1938 Taylor incorporó el modo derivativo en su Modelo 56R creando el proporcional-derivativo. El primer PID industrial, el Taylor Fulscope Modelo 100, fue puesto en el mercado en 1940.

El primer controlador electrónico analógico fue introducido en 1955 por The Swartwort². Entre 1955 y 1958 otros fabricantes comercializaron sus controladores electrónicos,

primero de tubos al vacío y luego transistorizados. En 1976 se introdujo el electrónico digital. En la actualidad todos los controladores de lazo industrial, están basados en el uso del microprocesador, incorporan gran variedad de estrategias de control preprogramadas, son completamente configurables, y pueden comunicarse con un computador supervisor.

ALGORITMOS PID.

El diagrama de bloques de la Fig. 1 muestra un lazo de control retroalimentado, en el cual G_c

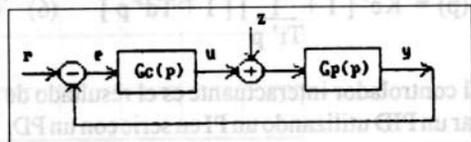


Fig. 1- Lazo de control retroalimentado

representa la función de transferencia del controlador. Las ecuaciones que relacionan sus entradas y salidas son

$$u(t) = G_c(p) e(t) \quad (1)**$$

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (2)$$

* Profesor asociado y Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica.

** Ver la Nomenclatura

El nombre o siglas utilizadas para identificar el tipo de controlador, normalmente está relacionado con los modos de control que lo forman: proporcional (P), integral (I) y/o derivativo (D). Los de uno o dos modos (P, PI y PD) son realizados de forma similar por todos los fabricantes. Sin embargo, al combinar los tres modos para formar un PID, no solamente existen diferencias entre la ecuación que utilizan los libros de texto y la de un controlador industrial, sino también en la forma en que los diferentes fabricantes la realizan⁴, incluso estos dan diferentes nombres a algoritmos o ecuaciones idénticas.

El controlador PID no interactuante "ideal" o algoritmo ISA, es el normalmente utilizado para explicar el funcionamiento de un PID en los libros de texto, y está representado por

$$G_c(p) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right] \quad (3)$$

por lo que la salida de un controlador de este tipo, en el dominio del tiempo, es

$$u(t) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i} \int c(t) dt + T_d \frac{dc(t)}{dt} \right] \quad (4)$$

la cual muestra claramente cada uno de sus tres modos de control.

En un PID "paralelo", cada modo tiene un ajuste de ganancia independiente

$$G_c''(p) = K_p + K_i / p + K_d p \quad (5)$$

La ecuación del PID interactuante "serie" es

$$G_c'(p) = K_c' \left[1 + \frac{1}{T_i' p} \right] \left[1 + T_d' p \right] \quad (6)$$

El controlador interactuante es el resultado de formar un PID utilizando un PI en serie con un PD.

Para poder realizar el modo derivativo es necesario incluir en la ecuación del controlador, un polo o filtro adicional, normalmente localizado en el plano complejo, diez veces más a la derecha que el cero del derivador, entonces

$$G_c(p) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{1 + T_d p}{1 + \alpha T_d p} \right] \quad (7)$$

$$G_c''(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + \frac{K_d p}{1 + \alpha T_d p} \quad (8)$$

$$G_c'(p) = K_c' \left[1 + \frac{1}{T_i' p} \right] \left[\frac{1 + T_d' p}{1 + \alpha T_d' p} \right] \quad (9)$$

son una mejor representación de un controlador ideal, paralelo y serie reales respectivamente.

Al controlador ideal se le dice no interactuante en el dominio del tiempo, ya que cada uno de los modos de control se encuentra separado del otro, aunque en el dominio de la frecuencia, la localización de los dos ceros del controlador se ve afectada tanto por T_i como por T_d . Por el contrario, aunque cada uno de los ceros del controlador serie, es afectado por solamente uno de los parámetros de ajuste, T_i' o T_d' , existe interacción entre los modos integral y derivativo en el dominio del tiempo.

La diferencia entre la ecuación ideal y la de los controladores "reales", surge desde la creación misma del primer controlador PID, ya que éste y la mayoría de los PID neumáticos y electrónicos analógicos, han sido fabricados utilizando la ecuación (9) dado que la misma permitió el uso de un solo amplificador. Es más, muchos fabricantes para mantener compatibilidad entre sus controladores neumáticos y, o electrónicos analógicos, con sus más recientes versiones digitales, han mantenido en estos últimos el algoritmo interactuante, aunque les sea igualmente fácil el representar uno ideal.

En la tabla de "Controladores o algoritmos PID comerciales" anexa, se listan fabricantes de controladores de lazo industriales, de programas para el control de procesos, así como de otros equipos que pueden incorporar las facilidades de control de lazo. La información contenida en esta tabla, se obtuvo en parte directamente de los mismos fabricantes, complementándola con información obtenida del demostrativo del programa ExpertTune[®].

Como se puede observar en esta tabla, aunque no existe uniformidad, la mayoría de los controladores de lazo de los fabricantes de instrumentos que pueden llamarse "tradicionales", representan un PID interactuante. Esto, como se dijo anteriormente, originado por su deseo de mantener compatibilidad entre sus instrumentos, de manera que si uno de sus controladores neumáticos o electrónicos analógicos, es sustituido por un controlador digital de fabricación reciente, o incluso por un sistema de control distribuido, el uso de los parámetros existentes, en el controlador nuevo, de como resultado el mismo comportamiento dinámico del lazo. Lamentablemente, pueden surgir problemas al sustituir un controlador existente por uno de otro fabricante, sin cambiar los parámetros de ajuste, si estos no utilizan la misma ecuación.

Se puede observar en la misma tabla, como las compañías que han desarrollado programas de control digital, utilizan por el contrario para sus controladores el algoritmo ideal o el paralelo.

Existen además otras variantes de las ecuaciones de los controladores, de las cuales la más importante es aquella en la cual, el modo derivativo no actúa sobre la señal de error, sino sobre la variable del proceso, o sea que la salida del controlador está dada por

$$u(t) = K_c \left[\left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) r(t) - \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{1 + T_d p}{1 + \alpha T_d p} \right) y(t) \right] \quad (10)$$

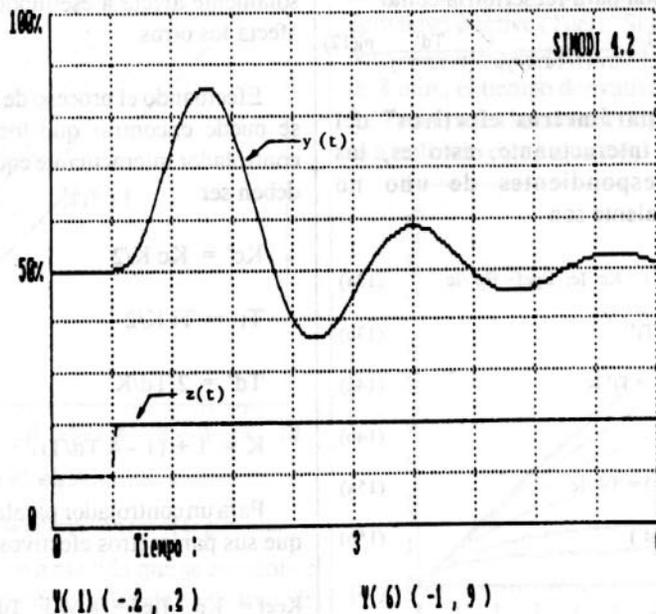
para el controlador PID ideal y

$$u(t) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i p} \right] \left[r(t) - \left(\frac{1 + T_d p}{1 + \alpha T_d p} \right) y(t) \right] \quad (11)$$

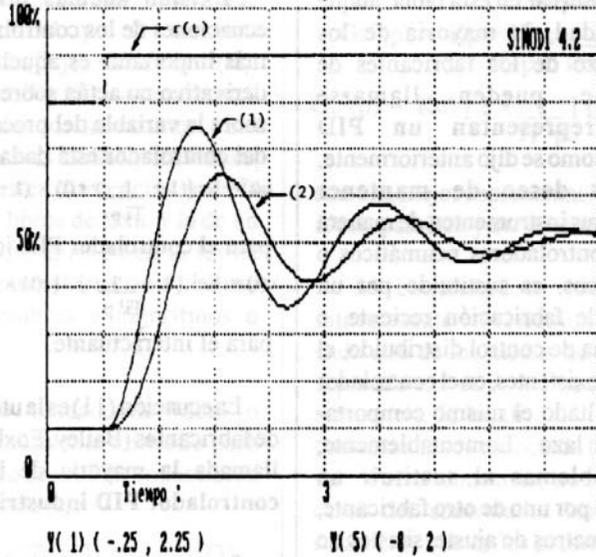
para el interactuante.

La ecuación (11) es la utilizada por gran cantidad de fabricantes (Bailey, Foxboro, Moore y otros), y es llamada la mayoría de las veces, simplemente **controlador PID industrial**.

Los dos controladores interactuantes, (9) y (11), se comportan en forma idéntica ante un cambio en una perturbación, pero su comportamiento es completamente diferente si cambia el valor deseado, cosa que puede observarse claramente en las Fig. 2 y 3.



MODELO: Fig. 2- Respuesta a una perturbación, PID 04.nov. 92



- (1) derivada actuando sobre el error
- (2) derivada actuando sobre la variable del proceso

MODELO: Fig. 3- Respuesta a cambio en el valor deseado, PIDi 04.nov. 92

ECUACIONES DE TRANSFORMACION.

La ecuación del controlador interactuante (6) puede ser manipulada para reescribirla como

$$Gc'(p) = Kc' (1 + Td'/Ti') [1 + \frac{1}{Ti' (1 + Td'/Ti') p} + \frac{Td'}{(1 + Td'/Ti')}] \quad (12)$$

por lo que los "parámetros efectivos" del controlador PID interactuante, esto es, los parámetros correspondientes de uno no interactuante equivalente son

$$Kcef = Kc' (1 + Td'/Ti') = Kc' Ic; \quad Bpef = Bp'/Ic \quad (13a)$$

$$Kcef = Kc' (Ti' + Td')/Ti' \quad (13b)$$

$$Tief = Ti' (1 + Td'/Ti') = Ti' Ic \quad (14a)$$

$$Tief = Ti' + Td' \quad (14b)$$

$$Tdef = Td'/(1 + Td'/Ti') = Td'/Ic \quad (15a)$$

$$Tdef = Ti' Td'/(Ti' + Td') \quad (15b)$$

$$Ic = 1 + Td'/Ti' \quad (16)$$

Ic fue llamado por Harriot⁵ "factor de interacción del controlador".

Como puede observarse de las ecuaciones (13) a (15), en un controlador interactuante variar el ajuste del modo integral o derivativo, no solamente afecta a ese modo, sino que también afecta los otros.

Efectuando el proceso de conversión inverso, se puede encontrar que los parámetros de un controlador interactuante equivalente a uno ideal deben ser

$$Kc' = Kc K/2 \quad (17)$$

$$Ti' = Ti K/2 \quad (18)$$

$$Td' = 2 Td/K \quad (19)$$

$$K = 1 + (1 - 4 Td/Ti)^{1/2} \quad (20)$$

Para un controlador paralelo podemos obtener que sus parámetros efectivos son

$$Kcef = Kp; \quad Tief = Kp/Ki; \quad Tdef = Kd/Kp \quad (21)$$

EFFECTOS DE LA INTERACCION.

La ecuación (20) indica claramente que en el controlador interactuante, el tiempo derivativo efectivo, no puede ser mayor que la cuarta parte del tiempo integral efectivo. Esto se alcanza cuando $Ti' = Td' = T'$, entonces $Tief = 2 T'$ y $Tdef = T'/2$. Por otra parte, si en algún momento Td' se hace mayor que Ti' , entonces Td' afectaría más a $Tief$ que a $Tdef$ y Ti' afectaría más a $Tdef$. Cuando $Ti' = Td'$, ambos ajustes afectan aproximadamente en la misma proporción a los tres modos. Por lo anterior es que en los controladores interactuantes se mantiene siempre $Td' < Ti'$.

El resultado de la interacción sobre los parámetros efectivos de un controlador serie, se muestra en las Fig. 4, 5 y 6. La Fig. 4, muestra como la ganancia efectiva del controlador crece a medida que el cociente Td'/Ti' crece, por lo que un aumento en Td' o un decremento de Ti' pueden fácilmente afectar la estabilidad del lazo. Si por ejemplo $Td'/Ti' = 0.5$, la ganancia real del controlador ($Kcef$) es un 50% mayor que el ajuste del modo proporcional (Kc').

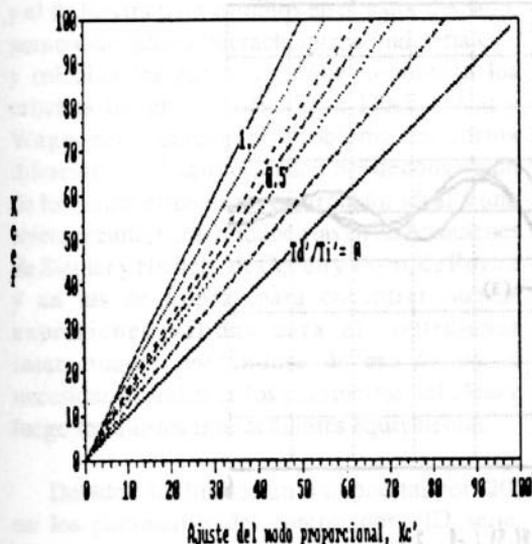


Fig. 4- Efecto de la interacción sobre la ganancia

La Fig. 5 muestra como a medida que se aumenta el ajuste del modo derivativo, el valor efectivo del tiempo integral ($Tief$) se ve incrementado también. Si el ajuste del modo integral del controlador (Ti')

fuera 5 min. y el del modo derivativo (Td') fuera 2 min., el tiempo integral efectivo sería 7 min., pero si se aumenta el valor de Td' a 4 min., $Tief$ aumentaría al mismo tiempo a 9 min., o sea que este cambio en el ajuste del modo derivativo tiene como efecto colateral, un aumento del tiempo integral de casi un 30%.

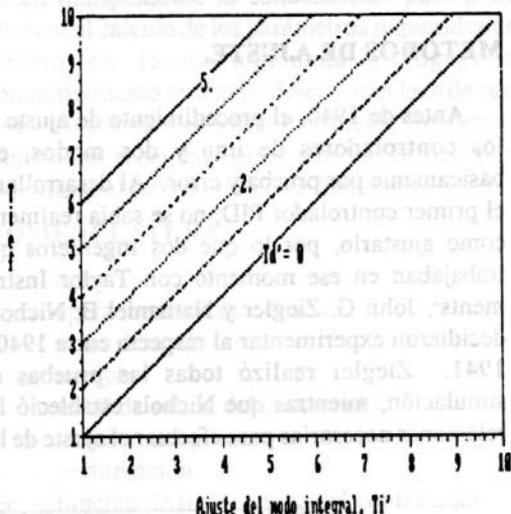


Fig. 5- Efecto de la interacción sobre el tiempo integral

La Fig. 6, muestra como el ajuste del modo integral tiene un gran efecto sobre el tiempo derivativo efectivo ($Tdef$). Si el ajuste del modo derivativo fuera de 4 min. y el del modo integral de 8 min., el tiempo derivativo efectivo sería de 2.67 min., o sea solamente un 67% del valor que se a utilizado como ajuste del modo derivativo.

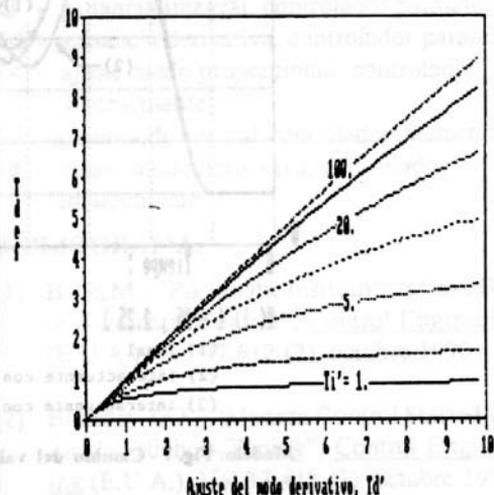


Fig. 6- Efecto de la interacción sobre el tiempo derivativo

Como se puede apreciar, la interacción hace que el cambio de un parámetro pueda afectar adversamente la estabilidad del lazo. Por ejemplo una disminución de T_i' , no solamente implica un aumento de la acción integral, sino que también aumenta la ganancia y disminuye el tiempo derivativo efectivos.

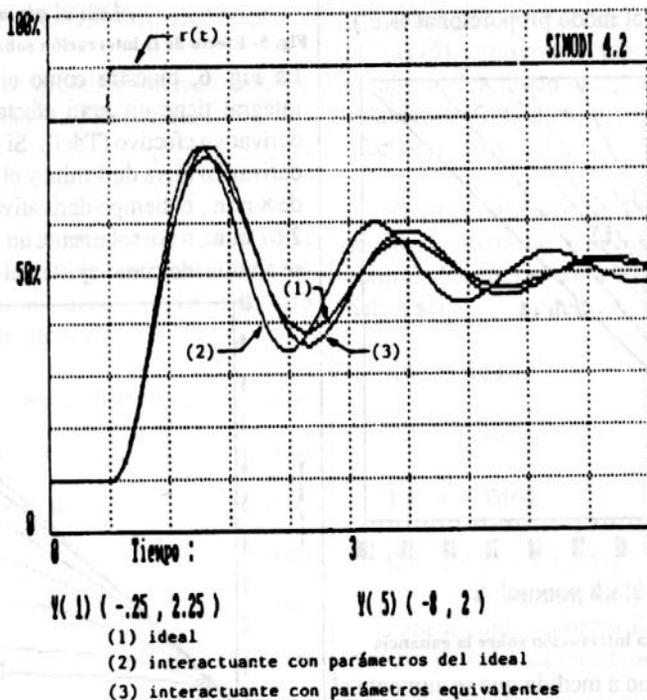
MÉTODOS DE AJUSTE.

Antes de 1940, el procedimiento de ajuste de los controladores de uno y dos modos, era básicamente por prueba y error. Al desarrollarse el primer controlador PID, no se sabía realmente como ajustarlo, por lo que dos ingenieros que trabajaban en ese momento con Taylor Instruments², John G. Ziegler y Nathaniel B. Nichols, decidieron experimentar al respecto entre 1940 y 1941. Ziegler realizó todas las pruebas de simulación, mientras que Nichols estableció las relaciones necesarias para efectuar el ajuste de los

controladores. El método desarrollado por Ziegler y Nichols¹⁴ ha sido desde esa época el patrón con el cual se han medido otros métodos y tanto en su versión original como con variantes, se sigue utilizando en la actualidad.

Las relaciones desarrolladas por Ziegler y Nichols son de aplicación directa a un controlador PID ideal, pero no pueden ser utilizadas directamente con uno interactuante, antes deben de calcularse los valores de ajuste del mismo por medio de las ecuaciones de transformación (17) a (20).

En la Fig. 7 se muestra la respuesta de un lazo de control arbitrario ante un cambio en el valor deseado, con un PID ideal con los parámetros calculados según el criterio de Ziegler y Nichols y con un controlador interactuante, ajustado con los mismos parámetros del ideal, y con los parámetros equivalentes necesarios.



Modelo: Fig. 7 - Cambio del valor deseado, ajuste Z y N. 04. Nov. 92



Si utilizamos los parámetros calculados por el método de Ziegler y Nichols, para ajustar directamente un controlador PID interactuante, como en este método $T_i = 4 T_d$, entonces se tendría que el factor de interacción del controlador sería $I_c = 1.25$ y los parámetros efectivos del mismo: $K_{cef} = 1.25 K_c$, $T_{ief} = 1.25 T_i$, y $T_{def} = 0.8 T_d$. El resultado sería que la ganancia y el tiempo integral efectivos son mayores a los requeridos y el tiempo derivativo menor, por lo que la respuesta del sistema con este ajuste tendría diferente sobreelongación y período de oscilación, e incluso en algún caso, podría causar inestabilidad.

Otros métodos de ajuste desarrollados a partir de esa época como el de Cohen y Coon³, Smith y Murrill¹², el de los criterios integrales de López⁷, o de Rovira¹⁰, están basados en el supuesto de que el controlador utilizado es ideal. El método de Martin⁸ por el contrario supone que el controlador es interactuante. Shinsky¹¹ estudia tanto el ideal como el interactuante. Kaya y Scheib⁶ repiten el trabajo de López para cambios en la perturbación y él de Rovira para cambios en el valor deseado, para controladores interactuantes e "industriales", y calculan los parámetros que minimizan los criterios integrales IAE, ISE e ITAE. Witt y Waggoner¹³ atacan el problema en forma diferente, y utilizan las ecuaciones de conversión de los parámetros de un controlador ideal a uno interactuante, para introducir las en las ecuaciones de Ziegler y Nichols, de Cohen y Coon, de Rovira y en las de López, para encontrar nuevas expresiones válidas para el controlador interactuante, evitándose de esa forma la necesidad de calcular los parámetros del ideal y luego los ajustes interactuantes equivalentes.

Debido a las limitaciones impuestas por (20) en los parámetros del controlador PID serie, cuando se calculan a partir de los de uno ideal, existen ocasiones en las cuales los métodos de cálculo de parámetros del controlador, desarrollados bajo el supuesto de que este es ideal, no pueden ser utilizados para el cálculo de los parámetros de uno interactuante.

CONCLUSIONES.

Las diferencias que existen entre las ecuaciones utilizadas por los fabricantes para representar el algoritmo PID en sus controladores de lazo, programas de control digital directo y otros equipos, hacen indispensable su conocimiento para poder efectuar el cálculo de los parámetros requeridos del mismo en forma adecuada y lograr el comportamiento dinámico deseado del lazo de control. Lo anterior es primordialmente importante cuando se reemplace un controlador por otro, máxime si el nuevo es de otro fabricante.

NOMENCLATURA.

- e - error
- p - operador derivada, d/dt
- r - valor deseado
- t - tiempo
- u - señal de salida del controlador
- y - variable del proceso
- z - perturbación
- G_c - función de transferencia del controlador
- G_p - función de transferencia de la planta
- α - ganancia del filtro o retardo del derivador (α = 0.1, valor típico)
- B_p - banda proporcional, controlador ideal
- K_c - ganancia del controlador, controlador ideal
- T_i - tiempo integral, controlador ideal
- T_d - tiempo derivativo, controlador ideal
- K_p - ganancia proporcional, controlador paralelo
- K_i - ganancia integral, controlador paralelo
- K_d - ganancia derivativa, controlador paralelo
- K_c' - ajuste modo proporcional, controlador interactuante
- T_i' - ajuste modo integral, controlador interactuante
- T_d' - ajuste modo derivativo, controlador interactuante

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Babb, M. - "Pneumatic Instruments Gave Birth to Automatic Control", Control Engineering (E.U.A.), Vol 37 #12 (2), octubre 1990
- [2] Blinky, G.J. - "Modern Control Started with Ziegler-Nichols Tuning", Control Engineering (E.U.A.), Vol 37 #12 (2), octubre 1990

- [3] Cohen, G.H. y G.A. Coon - "Theoretical Considerations of Retarded Control", ASME Transactions (E.U.A.), Vol 75, julio 1953, pag. 827-834
- [4] Gerry, J.P. - "A Comparison of PID Control Algorithms", Control Engineering (E.U.A.), Vol 34 #3, marzo 1987
- [5] Harriot, P. - Process Control, Nueva York, E.U.A.: McGraw-Hill, 1964
- [6] Kaya, A. y T.J. Scheib - "Tuning of PID Controls of Different Structures", Control Engineering (E.U.A.), Vol 38 #7, julio 1988
- [7] López, A.M. y otros - "Tuning Controllers With Error-Integral Criteria", Instrumentation Technology (E.U.A.), Vol 14 #11, noviembre 1967
- [8] Martin J., C.L. Smith y A.B. Corripio - "Controller Tuning from Simple Process Models", Instrumentation Technology (E.U.A.), Vol 22 #12, diciembre 1975
- [9] Morris, H.M. - "Electronic PID Controllers Shrink While Features Grow", Control Engineering (E.U.A.), Vol 37, #12 (2), octubre 1990
- [10] Rovira, A.A., P.W. Murrill y C.L. Smith - "Tuning Controllers for Setpoint Changes", Instruments & Control Systems (E.U.A.), Vol 42 #12, diciembre 1969
- [11] Shinskey, F.G. - Process-Control Systems, Nueva York, E.U.A.: McGraw-Hill, 1979
- [12] Smith, C.L. y P.W. Murrill - "A More Precise Method for Tuning Controllers", ISA Journal (E.U.A.), Vol 13 #5, mayo 1966
- [13] Witt, S.D. y R.C. Waggoner - "Tuning parameters for non-PID three-mode controllers", Hydrocarbon Processing (E.U.A.), Vol 69 #6, junio 1990
- [14] Ziegler, J.G. y N.B. Nichols - "Optimum Settings for Automatic Controllers", ASME Transactions (E.U.A.), Vol. 64, 1942, pag. 759-768

CONTROLADORES O ALGORITMOS PID COMERCIALES		
Fabricante	Algoritmo {1}	Equipo {2}
Allen Bradley, (ganancias independientes)	INT	CLP
Allen Bradley, (ISA)	ISA	CLP
Appied Automation (Hartmann & Braun)	PAR	CLO
Bailey, CLC01/02/03/04	INT	CLO
Bailey, Network 90, INFI90	INT, PAR	SCD
Barber Colman	ISA	CLO
Dow Chemical, CAMILE System	PAR	SCD
Fischer & Porter, MC5000	ISA	CLO
Fischer & Porter, Micro-DCI	INT	CLO
Fisher Controls, PROVOX	INT	SCD
Foxboro, MicroSpec, MultiStation	INT	SCD
Foxboro, Spec 200, Serie 760	INT	CLO
Heuristics, OnSpec	ISA	PCD
Honeywell, TDC AM (ideal)	ISA	SCD
Honeywell, TDC EC, BC, MC, AM (real)	INT	SCD
Honeywell, UDC 5000	INT	CLO
Iconics, Genesis	PAR	PCD
Intellution, The Fix	ISA	PCD
LabTech, LT/Control	PAR	PCD
Measurex	PAR	CLO
Modicon, Modelo 984	INT	CLP
Moore, MLC	INT	SCD
Moore, Micro 352B, 352E, 3910	INT	CLO
Partlow	ISA	CLO
Reliance, Automax (independiente)	PAR	SCD
Reliance, Automax (ISA)	ISA	SCD
Rosemount, Systema 3	ISA	SCD
SCI Technology	INT	PCD
Smar, CD600	ISA, PAR	CLO
Smar, LD301, TT301	ISA	CLO
Square D	ISA	CLP
Taylor, MOD 300	NT	SCD
Texas Instruments	ISA	CLP
Tumbull (TCS), Sistema 6000	ISA	CLO
Westinhouse, WDPF	PAR	SCD
Yokogawa, YEW Series 80 (SLPC)	ISA	CLO

{1} INT - interactuante; ISA - ideal; PAR - paralelo

{2} CLO - controlador de lazo; CLP - controlador lógico programable; PCD - programa de control digital directo; SCD - sistema de control distribuido

INGENIERIA DIDACTICA

*Ing. Fernando Cajas Dominguez**

Resumen

Se revela el carácter tecnológico de las "Ciencias de la Educación" a partir de una concepción de tecnología no reducida a las ingenierías tradicionales. Se dilucida el concepto de práctica educativa y sistema educativo apoyándose en la Teoría General de Sistemas y en las funciones de estado. Se analizan las consecuencias del enfoque tecnológico para una posible teoría de la educación.

Summary

The technological character of the "science education" is shown as a concept of technology not reduced to traditional engineering. The educational practice and educational system are defined with the help of the General System Theory and functions of state. The consequences of the technological approach are analysed.

1. INTRODUCCION

Estamos acostumbrados a identificar la práctica de la ingeniería con procesos industriales o con sus vecinos cercanos y francamente resulta difícil imaginarse la existencia de un enfoque tecnológico en los procesos educativos, a no ser por una identificación de tecnología educativa con artefactos, aparatos audiovisuales que nos ayudan en la tarea de la docencia. Esto posee varias explicaciones, veamos dos, las que consideramos las más importantes.

Explicación 1. Una concepción de tecnología restringida a artefactos, en el peor de los casos y a las ingenierías tradicionales (ingeniería civil por ejemplo) en el mejor, no permite visualizar la amplitud del enfoque tecnológico.

Explicación 2. La naturaleza conceptual de las denominadas "Ciencias de la Educación", en donde el planteamiento de los problemas educativos suele hacerse con el mínimo de herramientas conceptuales y en lenguaje ordinario, no permiten encontrar algún parecido con la manera en que los ingenieros resuelven los problemas.

Para poder analizar el posible carácter tecnológico de las "Ciencias de la Educación" es preciso disponer de un marco de referencia claro y coherente con la ciencia y la tecnología moderna. Dicho marco lo hemos desarrollado parcialmente en este trabajo, pero la mayoría se encuentra en otra parte (Bunge 1980, 1983, 1985a, 1985b, 1989; Cajas 1991, 1992a, 1992b; Herrera 1989, 1990, 1991a, 1991b, 1991c, 1992).

2. LA PRACTICA EDUCATIVA

La palabra educación posee muchos significados, pero existe cierto consenso en creer que "la

* Profesor titular de la Universidad de San Carlos de Guatemala, Carrera de Ingeniería, Centro Universitario de Occidente (CUNOC), Quetzaltenango, Guatemala, C.A.

- b) Se determina el grupo de Galois asociado y su respectivo polinomio.
- c) Se construye un dispositivo electrónico (físico), el cual en realidad es un divisor de polinomios, el polinomio de Galois es el divisor, y el procedimiento está "escrito" en los circuitos del dispositivo.
- d) Cuando llega una tira de bits, el dispositivo la interpreta como un polinomio (el dividendo), se efectúa la división; y del análisis del resultado se detecta si hubo error en la transmisión y lo corrige.

siempre es mayor que uno. Por lo tanto el método de la división sintética generalizado puede ser de gran utilidad para mejorar el diseño de los circuitos del dispositivo, máxime que se está trabajando en aritmética binaria.

2. División general y división sintética

Generalmente utilizamos la división sintética cuando hemos encontrado la raíz de un polinomio. La frecuencia con que se usa la división sintética en el proceso de factorización hace que a veces se olvide que la división sintética no es más que un resumen del proceso de dividir un polinomio P(x) entre el polinomio (x-r). Veamos:

Como puede verse, se trata de un caso de división de polinomios en que el grado del divisor en general

Ejemplo 2.1

$x^4 + 7x^3 - 19x^2 - 103x + 210 / x - 3 = x^3 + 10x^2 + 11x - 70$ División general (D.G)

$$\begin{array}{r}
 \text{Tramo 1} \quad x^4 + 7x^3 - 19x^2 - 103x + 210 / x - 3 \\
 \underline{-x^4 \pm 3x^3} \\
 \text{Tramo 2} \quad 10x^3 - 19x^2 \\
 \underline{-10x^3 \pm 30x^2} \\
 \text{Tramo 3} \quad 11x^2 - 103x \\
 \underline{-11x^2 \pm 33x} \\
 \text{Tramo 4} \quad -70x + 210 \\
 \underline{\pm 70x - 210} \\
 0
 \end{array}$$

División sintética (D.S)

1	7	-19	-103	210	3
0	3	30	33	-210	3
1	10	11	-70	1	3

Es decir, la división sintética no es más que una observación cuidadosa del método general de división de polinomios, cuando éste es aplicado a los polinomios dividiendo P(x) y divisor (x-r)

3. Características esenciales y no esenciales de la división sintética

- a) Para fijar ideas supongamos que el polinomio dividendo es

$A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ($a \in \mathbb{R}$)
 y que el polinomio divisor es
 $B(x) = x^m - b_{m-1}x^{m-1} - b_{m-2}x^{m-2} \dots - b_1x - b_0$. Con $m \leq n$.

Se observa que la condición de que A(x) y B(x) sean mónicos ($a_n=1, b_m=1$) podría fácilmente suprimirse, sin embargo esto hace los cálculos un poco engorrosos. En todo caso si $a_n \neq 1$ o $b_m \neq 1$ podemos factorizar para convertir a A(x) y B(x) en mónicos. Más aún, si $b_m=1$ no hay gran inconveniente si $a_n \neq 1$.

b) En ejemplos como el 2.1 tienden a confundirse las características de lo que podría ser un procedimiento general con características muy particulares de estos casos. Por ejemplo en 2.1 (D.S) escribimos 3 y no -3 para evitarnos los cambios de signos o "restas" de las segundas filas de los tramos.

c) En 2.1 (D.G) la primera columna de los tramos, la suma de sus componentes siempre es nula. La

suma de los coeficientes de la primer columna no siempre nula (en nuestro caso la segunda y última) es la que da el coeficiente que genera el tramo siguiente, es decir, el coeficiente de la potencia inmediatamente inferior del polinomio resultante $Q(x)$.

Para aclarar estas observaciones veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1 $1x^4 + 7x^3 - 19x^2 - 103x + 210 / (x^2 - 5x + 6) = x^2 + 12x + 35$

$$\begin{array}{r}
 1x^4 + 7x^3 - 19x^2 - 103x + 210 / (x^2 - 5x + 6) \\
 \text{T1 } \underline{-x^4 + 5x^3 + 6x^2} \\
 12x^3 - 25x^2 - 103x \\
 \text{T2 } \underline{-12x^3 + 60x^2 + 72x} \\
 35x^2 - 175x + 210 \\
 \text{T3 } \underline{-35x^2 + 175x + 210} \\
 0
 \end{array}$$

En conclusión, la tercera columna en los tramos 1 y 2 no era necesario sumar las en ese momento. Esta idea está implícita en el ejemplo 2.1, pero no se

ve claramente por ser la segunda columna la última. Veamos otro ejemplo (con residuo no nulo).

Ejemplo 3.2

$$\begin{array}{l}
 x^{11} - 2x^{10} + 4x^9 + 0x^8 - 7x^7 + 4x^6 + 5x^5 - 8x^4 + 6x^3 - 2x^2 + x - 25 / (x^4 - 3x^3 + 2x - 2) \\
 = x^7 + x^6 + 7x^5 + 19x^4 + 50x^3 + 142x^2 + 407x + 1151
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{T1 } x^{11} - 2x^{10} + 4x^9 + 0x^8 - 7x^7 + 4x^6 + 5x^5 - 8x^4 + 6x^3 - 2x^2 + x - 25 / (x^4 - 3x^3 + 2x - 2) \\
 \underline{-x^{11} + 3x^{10} + 0x^9 + 2x^8 + 2x^7}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^{10} + 4x^9 - 2x^8 - 5x^7 + 4x^6 \\
 \text{T2 } \underline{-x^{10} + 33x^9 + 0x^8 + 2x^7 + 2x^6}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7x^9 - 2x^8 - 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 \\
 \text{T3 } \underline{-7x^9 + 21x^8 + 0x^7 + 14x^6 + 14x^5}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 19x^8 - 7x^7 - 8x^6 + 19x^5 - 8x^4 \\
 \text{T4 } \underline{-19x^8 + 57x^7 + 0x^6 + 38x^5 + 38x^4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 50x^7 - 8x^6 - 19x^5 + 30x^4 + 6x^3 \\
 \text{T5 } \underline{-50x^7 + 150x^6 + 0x^5 + 100x^4 + 100x^3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 142x^6 - 19x^5 - 70x^4 + 106x^3 - 2x^2 \\
 \text{T6 } \underline{-142x^6 + 426x^5 + 0x^4 + 284x^3 + 284x^2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 407x^5 - 70x^4 - 178x^3 - 282x^2 + x \\
 \text{T7 } \underline{-407x^5 + 1121x^4 + 0x^3 + 814x^2 + 814x}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1151x^4 - 178x^3 - 532x^2 + 815x - 25 \\
 \text{T8 } \underline{-1151x^4 + 3453x^3 + 0x^2 + 2302x + 2302}
 \end{array}$$

$$3275x^3 - 532x^2 - 1487x + 2277$$

En este caso se ve claramente que (por ejemplo) los términos x^7 en los tramos 1, 2, 3, 4 realmente viene a interesarnos solo en el quinto tramo. Además, en cada tramo los coeficientes de la segunda fila son los negativos de los coeficientes del polinomio divisor multiplicados por el generador de este tramo. De estas dos últimas observaciones podemos sacar dos conclusiones:

primero, que podemos evitarnos estas sumas parciales en cada tramo y efectuar una sola suma en el momento que se necesite para determinar un generador.

segundo, que podemos suprimir todas las potencias de x y trabajar solo con los coeficientes.

4. La división sintética generalizada (dividendo y divisor mónicos)

Si observamos el ejemplo 3.1 y tomamos en cuenta lo expresado en el párrafo 3, podemos entonces construir una tabla similar a la tabla (D.S) en el ejemplo 2.1.

sección I	1	-19	-103	210			
sección II	0	5	60	175	0	5	
sección II	0	0	-6	-72	-210		-6
sección III	1	12	35	0	0		

Para entender como se construye esta tabla, dividiremos el procedimiento en varios pasos y subpasos.

Paso 1

- En la primera sección (única línea) ponemos los coeficientes del polinomio dividendo.
- Como el "divisor" es "doble" (5; -6) en la segunda sección de la tabla ponemos dos líneas.
- En la primera posición de la primera columna escribimos un cero; construimos un triángulo de ceros a partir de esa posición (hacia abajo).

sección I	1	7	-19	-103	210		
sección II	0						
sección II	0	0					

- Colocamos el "divisor" en sentido diagonal (esto sólo por razones pedagógicas) al lado derecho de la tabla.

- En la última columna de la segunda sección, escribimos un cero en la penúltima posición. A partir de esta posición hacemos un triángulo de ceros (hacia arriba)

sección I	1	7	-19	-103	210		
sección II	0				0	5	
sección II	0	0					-6

Con esto ya estamos listos para empezar a operar la tabla

Paso 2

- Se suma la primera columna completa (secciones I y II) y se coloca el resultado (en este caso, por ser mónico el dividendo) en la primera posición de la tercera sección.
- Se toma este multiplicador 1 (i.e. el generador del primer tramo en la división general) y se multiplica por cada uno de los números del "divisor" y se coloca en la tabla como indica la siguiente figura:

sección I	1	7	-19	-103	210		
sección II	0	5			0	5	
sección II	0	0	-6				-6
sección III		1					

- Se suma la última columna completa ($7+5+0$) y se coloca el resultado en la posición correspondiente (tercera sección)
- Se repiten los pasos b) y c) usando como multiplicador del divisor el número que aparezca en la última posición llena de la tercera sección. Esto hasta que estén llenas todas las posiciones de la segunda sección

sección I	1	7	-19	-103	210		
sección II	0	5	60	175	0	5	
sección II	0	0	-6	-72	-210		-6
sección III	1	12	35				

- Se suman las columnas restantes
- Como el "divisor" es de dos componentes entonces las dos últimas posiciones son los coeficientes del polinomio residuo.

5. Otros ejemplos

Ejemplo 5.1 Aplicar el método al ejemplo 3.2

Polinomio resultante: $x^7 + x^6 + 7x^5 + 19x^4 + 50x^3 + 142x^2 + 407x + 1151$

SI	1	-2	4	0	-7	4	5	-8	6	-2	1	25				
SII	0	3	3	21	57	150	426	1221	3453	0	0	0	3			
SII	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0		
SII	0	0	0	-2	-2	-14	-38	-100	-284	-814	-2302	0			-2	
SII	0	0	0	0	2	2	14	38	100	284	814	2302				2
SIII	1	1	7	19	50	142	407	1151	3275	-532	-1487	2277				

Polinomio residuo: $3275x^3 - 532x^2 - 1487x + 2277$

6. Demostración del algoritmo.

Sea $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$B(x) = x^m - b_{m-1} x^{m-1} - b_{m-2} x^{m-2} \dots - b_1 x - b_0$ con $n \geq m$

La tabla puede verse como una matriz $(m+1)(n+1)$, por conveniencia de notación indizaremos las entradas desde la $(0,0)$ hasta la (m,n) , quedando de la siguiente forma:

	0	1	2	3	n-m	n-m+1	n-m+2	...	n-2	n-1	n
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}							a_2	a_1	a_0
0	$c_0 b_{m-1}$	$c_1 b_{m-1}$				$c_{n-m} b_{m-1}$	0	...	0	0	0	0
						1						:
												:
0												0
						$c_0 b_0$						$c_{n-m} b_0$
c_0	c_1				...	c_m					c_{n-1}	c_n

La fila cero y columna cero no son de gran interés para nosotros, sea d_{ij} la entrada (i,j) de esta matriz, note que para $i \geq 1, j \geq 1$ se tiene

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ c_{j-i} b_{m-i} & \text{si } i \leq j \leq n-m+i \\ 0 & \text{si } j > n-m+i \end{cases}$$

Además $c_0 = a_n$ y $c_j = \sum_{i=1}^m d_{ij} + a_{n-j}$ para $j=1, \dots, n$

$$\text{Sea } Q(x) = a_n x^{n-m} + \sum_{j=1}^{n-m} c_j x^{n-m-j} \text{ y } R(x) = \sum_{j=n-m+1}^n c_j x^{n-j}$$

Note que $\text{grad}(Q) = n-m$ y $\text{grad}(R) = n-(n-m+1) = m-1 < m = \text{grad}(B)$.

Vamos a probar que $A(x) = Q(x) B(x) + R(x)$

Por la unicidad de los polinomios resultantes y residuo, se sigue que Q y R son precisamente esos polinomios.

$$\begin{aligned}
 Q(x) B(x) + R(x) &= [a_n x^{n-m} + \sum_{j=1}^{n-m} c_j x^{n-m-j}] [x^m + \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{m-j}] + \sum_{j=n-m+1}^n c_j x^{n-j} \\
 &= a_n x^n + \sum_{j=1}^{n-m} c_j x^{n-j} + a_n \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n-j} + \sum_{j=1}^{n-m} c_j x^{n-m-j} [\sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{m-j}] + \sum_{j=n-m+1}^n c_j x^{n-j} \\
 &= a_n x^n + \sum_{j=1}^n c_j x^{n-j} + a_n \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n-j} + x^{n-m} [\sum_{j=1}^{n-m} c_j x^j] [\sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{m-j}] \\
 &= a_n x^n + \sum_{j=1}^n c_j x^{n-j} + a_n \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n-j} + [\sum_{j=1}^{n-m} c_j x^j] [\sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{m-j}] \\
 &= a_n x^n + \sum_{j=1}^n c_j x^{n-j} + \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n-j} [\sum_{j=1}^{n-m} c_j x^j + a_n] \\
 &= a_n x^n + \sum_{j=1}^n c_j x^{n-j} + \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n-j} [\sum_{j=0}^{n-m} c_j x^j] \\
 &= a_n x^n + \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m d_{ij} + a_{n-j}) x^{n-j} + \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n-j} [\sum_{j=0}^{n-m} c_j x^j] \\
 &= a_n x^n + \sum_{j=1}^n a_{n-j} x^{n-j} + \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m d_{ij} x^{n-j}) + \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n-j} [\sum_{j=0}^{n-m} c_j x^j] \\
 &= A(x) + \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m d_{ij} x^{n-j}) + \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n-j} [\sum_{j=0}^{n-m} c_j x^j]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $Q(x) B(x) + R(x) = A(x) + D(x)$ donde

$$D(x) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m d_{ij} x^{n-j}) + \sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n-j} [\sum_{j=0}^{n-m} c_j x^j]$$

El problema se reduce entonces a probar que $D(x) = 0$. El primer término de $D(x)$ se expresa como:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m d_{ij} x^{n-j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x^{n-j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-m+i} c_{j-i} b_{m-i} x^{n-j} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-m} c_k b_{m-i} x^{n+i-k}$$

Esto por la definición de d_j , y haciendo el cambio de variable $j = i+k$. Por otra parte, el segundo término de $D(x)$ se expresa como:

$$\sum_{j=1}^m -b_{m-j} x^{n+j} \left[\sum_{j=0}^{n-m} c_j x^j \right] = \text{(sustituyendo } j \text{ por } i)$$

$$\sum_{i=1}^m -b_{m-i} x^{n+i} \left[\sum_{j=0}^{n-m} c_j x^j \right] = \text{(} i \text{ y } j \text{ son variables independientes)}$$

$$-\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=0}^{n-m} b_{m-i} c_j x^{n+i+j} \right] = \text{(sustituyendo } j \text{ por } k)$$

$$-\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n-m} b_{m-i} c_k x^{n+i+k} . \text{ Por lo tanto } D(x) = 0 \text{ Q.E.D.}$$

Nota. Como puede observarse, la prueba se hizo asumiendo que el polinomio $B(x)$ es mónico (i.e. $b_m=1$), no así con el polinomio $A(x)$. Podría hacerse la prueba con toda generalidad, sin embargo, esto hace la prueba sumamente engorrosa (y también la aplicación del algoritmo). En la práctica es más cómodo factorizar b_m y luego aplicar el algoritmo.