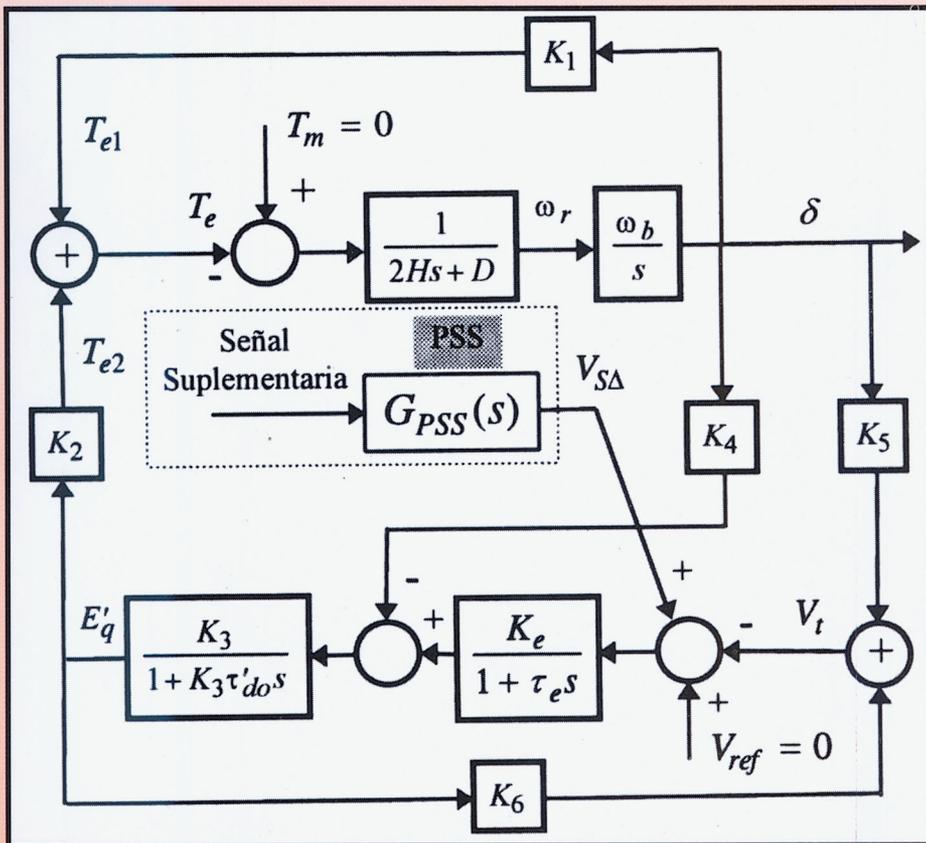


# Ingeniería

Revista de la Universidad de Costa Rica  
Enero/Junio 1997 VOLUMEN 7 N° 1



ISSN 1409-2441

# INGENIERIA

Revista Semestral de la Universidad de Costa Rica  
Volumen 7, Enero/Junio 1997 Número 1

## DIRECTOR

Rodolfo Herrera J.

## CONSEJO EDITORIAL

Víctor Hugo Chacón P.

Ismael Mazón G.

Domingo Riggioni C.

## CORRESPONDENCIA Y SUSCRIPCIONES

Editorial de la Universidad de Costa Rica  
Apartado Postal 75  
2060 Ciudad Universitaria Rodrigo Facio  
San José, Costa Rica

## CANJES

Universidad de Costa Rica  
Sistema de Bibliotecas, Documentación e Información  
Unidad de Selección y Adquisiciones-CANJE  
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio  
San José, Costa Rica

### Suscripción anual:

Costa Rica: ₡ 1 000,00

Otros países: US \$ 25,00

### Número suelto:

Costa Rica: ₡ 750,00

Otros países: \$ 15,00



Edición aprobada por la Comisión Editorial de la Universidad de Costa Rica  
© 1998 EDITORIAL DE LA UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
Todos los derechos reservados conforme a la ley  
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio  
San José, Costa Rica.

Revisión Filológica: *Lorena Rodríguez*

Diseño Gráfico, Diagramación y Control de Calidad:  
*Sergio Aguilar Mora*

*Impreso en la Oficina de Publicaciones  
de la Universidad de Costa Rica*

Revista  
620.005  
I-46i

Ingeniería / Universidad de Costa Rica. —  
Vol. I, no. 1 (ene./jun. 1991)— . — San José, C. R. : Editorial de  
la Universidad de Costa Rica, 1991— (Oficina de Publicaciones de la  
Universidad de Costa Rica)  
v. : il

ISSN 1409-2441

Semestral.

1. Ingeniería - Publicaciones periódicas.

CCC/BUCR—250



## CONTROL ROBUSTO CON PLANIFICACION DE GANANCIA

William Colmenares \*

Ernesto Granado \*\*

Ismael Mazón G. \*\*\*

José Antonio Ramírez H. \*\*\*\*

**Palabras clave:** Control Robusto, control difuso, planificación de ganancia.

### RESUMEN

En este trabajo se propone calcular un compensador dinámico estrictamente propio que satisface objetivos  $H_\infty$ ,  $H_2$  y de ubicación de polos en regiones de Desigualdades Matriciales Lineales (LMI). El controlador así obtenido será luego sometido a la supervisión de una estrategia borrosa (*fuzzy*) que garantizará un nivel de comportamiento similar sin el desgaste de actuador que implica la estrategia robusta que normalmente arroja ganancia alta. La prueba se realizará sobre un sistema dinámico con una no linealidad tipo saturación, con perturbaciones de carga de alimentación y ruido de medición.

### SUMMARY

In this paper it is proposed the calculus of a dynamic controller strictly main that satisfy the objectives  $H_\infty$ ,  $H_2$  and the poles location at Linear Matrix Inequalities (LMI) regions. Then the gain of that controller was supervised by a fuzzy strategy, guarantee the same performance, but without the greatest effort in the actuators as it is obtained when only robust control is considered. The proof was done over a dynamic system with a saturation nonlinearity, with feed load perturbations and measurement noise.

## 1. INTRODUCCION

El desarrollo acelerado de las técnicas de integración electrónica y de programación de la última década ha posibilitado, a un costo razonable, el desarrollo de una amplia variedad de técnicas de control automático basadas en dispositivos digitales<sup>1</sup>. Esto ha dado paso al desarrollo de estrategias de alto grado de especialización capaces de adaptarse a medios ruidosos, perturbados, no linealidades y posibles variaciones en los parámetros del sistema controlado<sup>2</sup>.

\* Ph.D., Profesor del Departamento de Procesos y Sistemas/Centro de Automatización Industrial de la Universidad Simón Bolívar, Venezuela.

\*\* M.Sc., Profesor del Departamento de Procesos y Sistemas de la Universidad Simón Bolívar, Venezuela.

\*\*\* MSc., Profesor de la Escuela de Ingeniería Eléctrica Universidad de Costa Rica.

\*\*\*\* Lic., Profesor de la Escuela de Ingeniería Eléctrica Universidad de Costa Rica.

<sup>1</sup> Y. F. Li y C.C. Lau. Development of Fuzzy Algorithms for servosystems, *IEEE Control Systems Magazine*, No.4, pp. 65-72, 1989.

<sup>2</sup> Soucek, Branco. "Fuzzy, Holographic and Parallel Intelligence: The Sixth-Generation Breakthrough". Wiley-Interscience Publication. USA, 1992.

Una de estas estrategias son los sistemas fundamentados en reglas, en los que el control *fuzzy* o difuso es un caso particular de estos. En el control difuso la decisión o acción final de control está fundamentada en la intuición, conocimiento y experiencia humana.

Todo control difuso puede ponerse en marcha en tres etapas: fusificación, aplicación de reglas y defusificación<sup>3,4</sup>. Los mecanismos de decisión se basan en los principios de la lógica difusa desarrollados por Lofti Zadeh<sup>5</sup>.

También, el Control Robusto es una de las teorías de control que ha experimentado más investigación y avances desde su formulación por Zames<sup>6</sup>. En efecto el problema ahora reconocido como  $H_\infty$  ya resuelto por un número de autores<sup>7,3</sup> ha alcanzado elevada madurez y está fuertemente basado en conceptos y técnicas clásicas de diseño de controladores, pero además, incorpora de manera explícita, información de la incertidumbre o de las perturbaciones.

Para efectos de análisis, en el marco del problema de  $H_\infty$  y bajo suposiciones adecuadas para la incertidumbre o las perturbaciones, la garantía de estabilidad para toda la familia de sistemas (estabilidad robusta<sup>4</sup>) o la certeza de un cierto desempeño (comportamiento nominal<sup>4</sup>) ante la familia de perturbaciones externas puede verificarse evaluando la norma infinito de alguna función de transferencia. Así, para efectos de síntesis, el paradigma de control robusto se puede representar como en la figura No. 1.

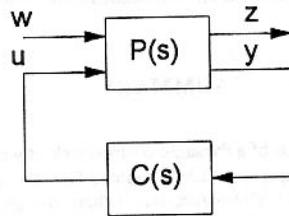


Figura No.1. Paradigma del control robusto

y lo que se desea es encontrar una ley de control  $C(s)$  de modo que :

$$\|T_{wz}\|_\infty < \gamma_\infty \quad (1)$$

donde  $T_{wz}$  es la función de transferencia entre  $w$  y  $z$ .

<sup>3</sup> Gahinet y Apkarian. A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, pp. 421-448, 1994.

<sup>4</sup> Morari y Zafrou. "Robust Process Control". Prentice Hall Inc., 1989.

<sup>5</sup> L. A. Zadeh. Fuzzy Sets, *Inform. Contr.*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.

<sup>6</sup> Zames. Feedback and Optimal Sensitivity : Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 26, No. 2, pp. 301-320, 1981.

<sup>7</sup> Doyle, Glover, Khargonekar y Francis. State-Space Solution to the Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 34, No. 8, pp. 831-847, 1989.

Cuando la señal de perturbación tiene forma conocida o cuando lo que se quiere es atenuar una señal de ruido con varianza conocida  $R(t)$  y se desea asegurar un cierto desempeño del sistema ante esas señales, clásicamente el problema es manejado como uno de LQG o  $H_2$ . En este caso el paradigma de control sigue siendo el mismo que se muestra en la figura No.1, solo que para efectos de análisis se verifica la atenuación, por ejemplo, a un ruido blanco con varianza  $R(t)=\gamma_2\delta(t)$ , sobre la norma 2 de alguna función de transferencia, i.e.,

$$\|T_{wz}\|_2 < \gamma_2 \quad (2)$$

Una vez conocidas las condiciones que deben verificarse en ambos problemas ( $H_\infty$ ,  $H_2$ ) hay que proveerse de condiciones equivalentes de las que pueda extraerse el compensador.

Para ello considere un sistema definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw \\ z &= Cx \end{aligned} \quad (3)$$

Para este sistemas las condiciones vienen dadas por los siguientes lemas :

**Lema 1** (Bounded Real Lemma<sup>8</sup>) : Las siguientes proposiciones son equivalentes para el sistema (3)

1. A es una matriz Hurwitz y  $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma_\infty$
2. Existe una matriz  $P>0$  tal que

$$AP+PA^T+\gamma_\infty^{-2}BB^T+PC^T C P < 0 \quad (4)$$

**Lema 2** En el sistema (S1) se cumple que<sup>9</sup> :

$$\|T_{wz}\|_2^2 = \text{Traza}(CL_c C^T) = \text{Traza}(B^T L_o B) \quad (5)$$

donde  $L_c$  y  $L_o$  son respectivamente los gramianos de controlabilidad y observabilidad respectivamente y ellos satisfacen :

$$\begin{aligned} AL_c + L_c A^T + BB^T &= 0 \\ A^T L_o + L_o A + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Como se verá más adelante, en el cálculo del compensador, estas expresiones permitirán calcular la ley de control.

Adicionalmente, la teoría del control robusto ha encontrado una herramienta de aplicación (además de potenciación de las herramientas de investigación) en las Desigualdades Matriciales Lineales (Linear Matrix Inequalities LMIs) que surgen de la fórmula del complemento de Schur y que, resumidamente, pueden escribirse como :

<sup>8</sup> Zhou y Khargonekar. An Algebraic Equation ..., *Systems & Control Letters*, vol 11, pp. 85-91, 1988.

<sup>9</sup> Geromel, Peres y Souza.  $H_2$  Guaranteed cost control ..., *Systems & Control Letters*, No 19, pp. 23-27, 1992.

**Lema 3** Las siguientes proposiciones son equivalentes<sup>10</sup> ( $P=P^T$ ,  $Q=Q^T$  y  $S$  matrices de dimensiones apropiadas):

$$\text{I. } P > 0 \text{ y } Q - SP^{-1}S^T > 0 \quad \& \quad Q > 0 \text{ y } P - S^TQ^{-1}S > 0 \quad (8)$$

$$\text{II. } \begin{pmatrix} P & S^T \\ S & Q \end{pmatrix} > 0 \quad (9)$$

en su forma dual :

Corolario 1 :

$$\text{I. } P > 0 \text{ y } SP^{-1}S^T - P < 0 \quad \& \quad Q > 0 \text{ y } S^TQ^{-1}S - P > 0 \quad (10)$$

$$\text{II. } \begin{pmatrix} -P & S^T \\ S & -Q \end{pmatrix} < 0 \quad (11)$$

En el marco de las LMIs podemos escribir ambos problemas para el sistema (3) como<sup>11</sup>:

$$H_\infty : (\|T_{wz}\|_\infty < \gamma_\infty)$$

$$1. \quad P > 0 \quad (12)$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T & B & PC^T \\ B^T & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ CP & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (13)$$

$$H_2 : (\|T_{wz}\|_2 < \gamma_2)$$

$$1. \quad \text{traza}(Q) < \gamma_2^2 \quad (14)$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} Q & CP \\ PC^T & P \end{pmatrix} > 0 \quad (15)$$

$$3. \quad AP + PA^T + BB^T < 0$$

<sup>10</sup> Iwasaki y Skelton. All Controllers for the General. All Controllers for General Control Problems: LMI Existence and Conditions and State Space Formulas, *Automática*, vol. 30 No. 8, pp. 1307-1317, 1994.

<sup>11</sup> Gahinet, Nemirovski, Laub, Chilali. "LMI Control Toolbox". The MathWorks, Inc. USA, 1995.

en el caso de  $H_2$ , es fácil demostrar que  $P > L_c$  y  $\text{traza}(Q) > \|T_{wz}\|_2^2$ . De allí el resultado que se muestra<sup>9</sup>.

La bondad de formular el problema como una colección de LMIs no se limita a la ventaja implícita del diseño multiobjetivo sino que el problema se transforma en uno de programación convexa (lineal de hecho) y que por ende, conoce de herramientas sumamente poderosas para su solución y que, más aún, comienzan a aparecer de manera estándar<sup>11</sup>.

Además de los objetivos en  $H_\infty$  y  $H_2$ , otras especificaciones, normalmente asociadas a la respuesta temporal del sistema, pueden ser incorporadas. En efecto, especificaciones del tipo de ubicación de polos en regiones del plano  $s$  en casi cualquier caso pueden describirse como *regiones LMI*. Estas se pueden definir como:

**Definición 1:** Una región (D) del plano  $s$  se llama región LMI si la misma puede describirse como<sup>12</sup> :

$$D = \{z \in \mathbb{C} : L + Mz + M^T \bar{z} < 0\} \quad (16)$$

donde  $M$  y  $L=L^T$  son matrices reales fijas y  $\bar{z}$  es el complejo conjugado de  $z$ .

En cuanto a las regiones LMI, se cumple que una matriz  $A$  tiene todos sus autovalores en esa región si y solo si existe una matriz  $P > 0$  tal que<sup>9</sup>:

$$\{l_{ij}P + m_{ij}AP + m_{ji}PA^T\}_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \quad (17)$$

donde  $l_{ij}$  es el elemento  $ij$  de  $L$  y  $m_{ij}$  el  $ij$  de  $M$ . También se entiende que :

$$\{l_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq m} = \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & l_{1m} \\ \vdots & & \\ l_{m1} & \dots & l_{mm} \end{pmatrix} \quad (18)$$

la ecuación característica de  $D$  viene dada por :

$$f_D(z) = L + Mz + M^T \bar{z} \quad (19)$$

Un ejemplo de región LMI es el de la figura No.2 :

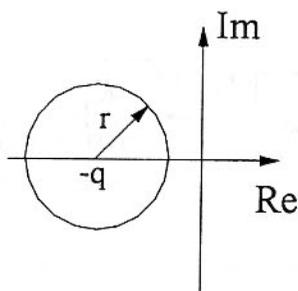


Figura No.2. Ejemplo de región LMI.

<sup>12</sup> Chilali y Gahinet.  $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints : An LMI Approach..., *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 41, No. 3 pp. 358-367, 1996.

cuya ecuación característica es :

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -r & \bar{z} + q \\ z + q & -r \end{pmatrix} \quad (20)$$

Así, una matriz A tiene todos sus autovalores en ese círculo centrado en -q con radio r si y solo si, existe una matriz P>0 tal que:

$$\begin{pmatrix} -rP & PA^T + qP \\ AP + qP & -rP \end{pmatrix} < 0 \quad (21)$$

es fácil recobrar (con q=0), utilizando la fórmula del complemento del Schur la expresión clásica de estabilidad de sistemas discretos.

Observe que para obtener la ecuación de la región LMI basta con substituir en su ecuación característica las z por AP, las z compleja conjugada por PA<sup>T</sup> y los escalares por P.

En este trabajo se propone calcular un compensador dinámico estrictamente propio que satisface objetivos  $H_\infty$ ,  $H_2$  y de ubicación de polos en regiones LMI. El controlador así obtenido será luego sometido a la supervisión de una estrategia borrosa (*fuzzy*) que garantizará un nivel de comportamiento similar sin el desgaste de actuador que implica la estrategia robusta que, normalmente, arroja ganancia alta. La prueba se realizará sobre un sistema dinámico con una no linealidad tipo saturación, con perturbaciones de alimentación y ruido de medición.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL CONTROLADOR

### 2.1 Sistema a controlar

La simulación del control se realizó con el modelo de un servomotor DC. de laboratorio tipo ES130 de Feedback Limited<sup>13</sup>.

El fabricante proporciona el modelo presentado en la figura No.3.

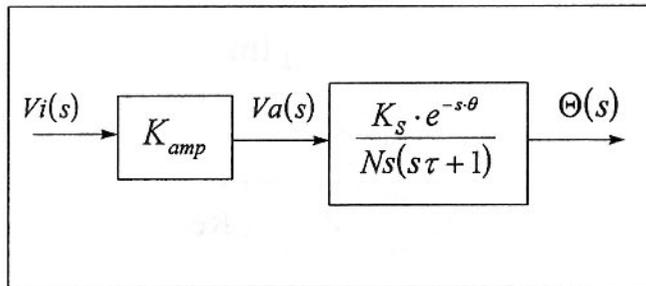


Figura No.3. Modelo del servomotor

<sup>13</sup> Feedback Limited. "Technical Notes: Servosystem ES130". London, 1972.

Donde  $V_i(s)$  es el voltaje de entrada al amplificador del servo en voltios,  $\Theta(s)$  es la posición de salida en radianes,  $K_{amp}$  es la ganancia del amplificador,  $V_a(s)$  es el voltaje de armadura del motor en voltios,  $K_s$  la constante del servomotor,  $\tau$  la constante de tiempo del sistema en segundos,  $\theta$  el retardo de transporte del sistema y  $N$  es el factor de reducción del sistema reductor de engranajes.

Los valores proporcionados por el fabricante son:

- $\tau = 0.16$  segundos.
- $N = 16$ .
- $K_{amp} K_s = 165$  Newton-metro-segundos / Ampere-Voltios.
- $\theta = 0.01$  segundos.

Para simplificar el modelo se tiene que  $K_p = K_{amp} K_s / N$  ( $K_p = 10.31$ ), de esta forma el modelo final será:

$$\frac{\Theta(s)}{V_i(s)} = \frac{K_p e^{-s\theta}}{s(s\tau + 1)} \quad (22)$$

Por transformada  $z$  modificada se obtiene la función de transferencia  $Z$  del retenedor planta:

$$G_o(z) = \frac{\tau \cdot K_p \cdot (c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3})}{(1 + b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-3})} \quad (23)$$

donde (23) es la función de transferencia del equivalente retenedor-planta.

Además,

$$c_0 = -1 + e^{-amT} + amT + aT \quad (24)$$

$$c_1 = -amT \cdot e^{-amT} - 2 \cdot e^{-amT} + e^{-aT} - amT + 1 \quad (25)$$

$$c_2 = -amT \cdot e^{-amT} - aT \cdot e^{-aT} + e^{-amT} - e^{-aT} \quad (26)$$

$$b_0 = -e^{-aT} - 2 \quad (27)$$

$$b_1 = 2 \cdot e^{-aT} + 1 \quad (28)$$

$$b_2 = -e^{-aT} \quad (29)$$

$$a = \frac{1}{\tau} \quad (30)$$

$$m = 1 - \frac{\theta}{\tau} \quad (31)$$

donde  $T$  es el período de muestreo.

Entonces la ecuación en diferencias resultante es:

$$\Theta(k) = K_p \cdot \tau \cdot (V_i(k-1) \cdot c_0 + V_i(k-2) \cdot c_1 + V_i(k-3) \cdot c_2) - \Theta(k-1) \cdot b_0 - \Theta(k-2) \cdot b_1 - \Theta(k-3) \cdot b_2 \quad (32)$$

En las simulaciones realizadas se escogió un período de muestreo de  $T = 0.05$  segundos. Considerando, como criterio para su escogencia, que sea bastante menor que la constante de tiempo del sistema.

## 2.2 Cálculo de la ley de control

Para el sistema en consideración, representado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{10.31}{s(0.16s + 1)} \quad (33)$$

se desea calcular una ley de control que minimice, en la salida del sistema, el efecto de perturbaciones (persistentes o no) en la alimentación del sistema. Esquemáticamente, el lazo de control se puede representar como :

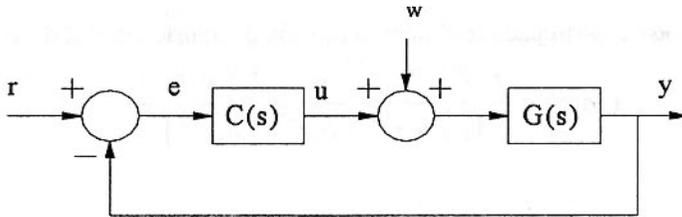


Figura No.4. Lazo de control

donde "y" es la salida medible del sistema, "e" es el error de seguimiento ( $r - y = e$ ), "u" es la señal de control y "w" es la perturbación en la alimentación.

En términos del problema planteado, los objetivos de diseño se fijaron en :

1. Si "w" es una señal de ruido blanco con varianza  $R(t) = \delta(t)$ , entonces se desea que :

$$\|T_{we}\|_2 < 1 \quad (34)$$

donde  $T_{we}(s)$  es la función de transferencia entre "w" y "e".

2. Para cualquier otra señal  $w(t)$  persistente o no, de la que solo se conoce que  $\|w(t)\|_2 < 1$  se desea que

$$\|T_{wy}\|_\infty < 1 \quad (35)$$

Evidentemente, la selección de "e" ó "y" desde el punto de vista del problema a resolver, no representa ninguna diferencia ya que  $y = -e$ . La selección de "e" para el objetivo (1) de  $H_2$  se hace para facilitar la comprensión de la metodología de diseño y para enfatizar el hecho de que los objetivos de ambos problemas ( $H_\infty - H_2$ ) pueden ser diferentes y aún encontrar fácil formulación y solución en el marco de control robusto.

Definiendo

$$z = \begin{bmatrix} e \\ y \end{bmatrix} \quad (36)$$

se puede volver a esquematizar el problema bajo el paradigma de control robusto de acuerdo con la figura No.1.

La planta generalizada  $P(s)$  tiene como entradas "w" y "u" y como salidas "z" y "y".

En el caso del sistema estudiado la planta generalizada puede representarse como se indica en la figura No.5.

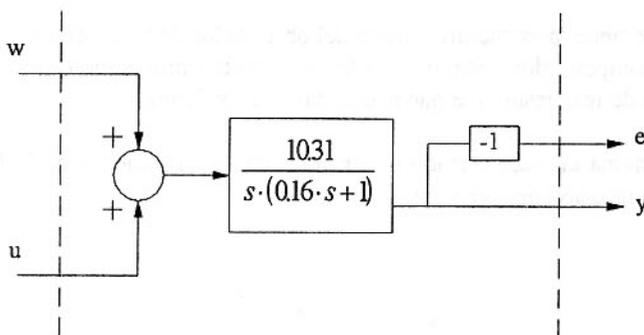


Figura No.5. Planta generalizada

La representación en variables de estado de la planta generalizada queda :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_2 &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ z_\infty &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ y &= C_3 x + Du \end{aligned} \quad (37)$$

En el sistema bajo estudio, las matrices resultan :

$$A = \begin{bmatrix} 6.25 & 0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$C_1 = -C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -64.4375 \end{bmatrix} \quad (40)$$

siendo el resto de las matrices iguales a cero.

Para el cálculo del compensador se escoge seguir un método más convencional y siempre asociado a las representaciones de estado de sistemas, esto es, construir un compensador fundamentado en la realimentación de estados y luego sobre el sistema dual construir un estimador de esos estados.

Los objetivos de control que se han impuesto, definen "calidad" a nivel de desempeño del controlador. Una pequeña violación de éstos significaría menos atenuación en alguna circunstancia. Ni la estabilidad, ni la rapidez del sistema se ven comprometidos con este enfoque.

De esta manera el compensador que se propone es de la forma :

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= Ax_c + B_2 u + K_o (C_3 x_c - y) \\ u &= K_s x_c\end{aligned}\quad (41)$$

compensador dinámico que tiene la estructura clásica del observador de Luenberger<sup>14</sup>.

Esta estructura del compensador permite establecer en forma muy simple un tercer objetivo de control, a saber, la rapidez de respuesta, que puede denotarse de la forma :

3. Todos los polos del sistema en lazo cerrado deben ubicarse en el poliedro de la figura No.6, que está definido por la intersección de 3 regiones LMI.

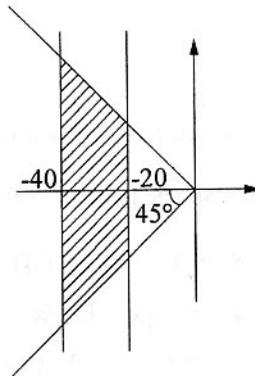


Figura No.6. Poliedro de diseño

Es bien sabido que al cerrar el lazo con un compensador como (41) todos los polos del sistema en lazo cerrado, ecuaciones (3) y (41), se ubican en :

$$\begin{aligned}\lambda_i(A+B_2K_s) \quad i=1,\dots,n \\ \lambda_j(A+K_oC_3) \quad j=1,\dots,n\end{aligned}\quad (42)$$

donde  $\lambda_i(\bullet)$  y  $\lambda_j(\bullet)$  representan los autovalores de las matrices respectivas.

<sup>14</sup> Phillips y Harbor. "Feedback Control Systems". Prentice Hall Inc, 1991.

El cálculo del compensador tendrá entonces 2 etapas, una para el cálculo de la ganancia de estabilización  $K_s$  y otra para el cálculo de la ganancia del observador  $K_o$ .

El método es como sigue: se calcula una ganancia  $K_s$  que satisface todos los objetivos de control para el sistema (S1) (como si todos los estados están disponibles para la realimentación) y luego se repite el mismo proceso en el sistema dual para el cálculo de la ganancia  $K_o$ .

#### Cálculo de $K_s$ :

El objetivo  $H_\infty$  ( $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma_\infty$ ) se cumple para el sistema (3) si definimos una ley de control  $u=K_s x$ , si y solo si:

$$\begin{aligned} 1) & P(A + B_2 K_s)^T + (A + B_2 K_s)P + \gamma_\infty^{-2} B_1^T B_1 + P C_2^T C_2 P < 0 \\ 2) & P > 0 \end{aligned} \quad (43)$$

la primera expresión puede re escribirse como una LMI de la forma

$$\begin{pmatrix} PA^T + AP + B_2 R_s^T + R_s B_2^T & PC_2 & B_1^T \\ C_2^T P & -I & 0 \\ B_1 & 0 & -\gamma_\infty^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (44)$$

donde  $R_s = PK_s^T$ .

De igual forma, el objetivo  $H_2$  ( $\|T_{we}\|_2^2 < \gamma_2$ ) es equivalente a (bajo realimentación de estados):

$$\begin{aligned} 1) & \text{Traza}(Q) < \gamma_2 \\ 2) & \begin{pmatrix} Q & C_1 P \\ PC_1^T & P \end{pmatrix} > 0 \\ 3) & AP + PA^T + B_2 R_s^T + R_s B_2^T + B_1 B_1^T < 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$R_s$  tal como fue definido anteriormente.

Finalmente, los objetivos de ubicación de polos en la región definida en la figura No.6 son:

a) la banda<sup>12</sup> entre  $-20^\circ$  y  $-40^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + B_2 R_s^T + R_s B_2^T + 40 & 0 \\ 0 & -80 - (AP + PA^T + B_2 R_s^T + R_s B_2^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (46)$$

b) el cono con base en el origen y ángulo de 45° respecto al eje real negativo :

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + B_2 R_s^T + R_s B_2^T & -(AP - PA^T + B_2 R_s^T - R_s B_2^T) \\ AP - PA^T + B_2 R_s^T - R_s B_2^T & AP + PA^T + B_2 R_s^T + R_s B_2^T \end{pmatrix} < 0 \quad (47)$$

de nuevo  $R_s = PK_s^T$ .

Como puede observarse, el cálculo de la ganancia  $K_s$  de realimentación de estados con las especificaciones dadas, no es más que una colección de problemas convexos (LMIs). Más aún, el problema también lo es con respecto a  $\gamma_\infty^2$  y  $\gamma_2$ , luego puede ensayarse resolver el problema imponiendo además la minimización de una de las dos cotas o la minimización de la suma de ambas.

Para resolver el problema, tal como ha sido planteado, se utilizó el *toolbox* estándar de MATLAB<sup>®</sup> de resolución de LMIs y en el que se planteó la minimización de  $\gamma_\infty^2$  dejando  $\gamma_2 \leq 1$ .

El cálculo de  $K_o$  se realiza exactamente de la misma manera, pero sobre el sistema dual, esto es reemplazando en las LMI descritas  $A$  por  $A^T$ ,  $B_2$  por  $C_2^T$  (o  $C_3^T$ ) y  $B_1$  por  $C_1$ . Así, por ejemplo, la especificación de que los polos del sistema estén a la izquierda de -20 se escribiría como :

$$A^T P + PA + C_2^T R_o + R_o^T C_2 + 40 < 0 \quad (48)$$

y  $R_o^T = PK_o$ .

Al formular ambos problemas en MATLAB<sup>®</sup>, los resultados obtenidos son :

$$K_s = \begin{bmatrix} -33.7472 & -799.8207 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$K_o = \begin{bmatrix} -9.1355 \\ -0.5237 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Luego la dinámica el compensador resulta :

$$Ac = 1.0e + 003 * \begin{pmatrix} -0.0400 & -1.3885 \\ 0.0010 & -0.0337 \end{pmatrix} \quad (51)$$

en términos de la función de transferencia resulta:

<sup>®</sup> MATLAB es una marca registrada de MathWorks, Inc.

$$G_c(s) = \frac{727.1s + 9925}{s^2 + 73.74s + 2738} \quad (52)$$

### 3. PLANIFICACION DE LA GANANCIA EN EL CONTROL ROBUSTO

#### 3.1 Propuesta de un controlador robusto con planificación difusa de la ganancia

Se propone el control de la planta :

$$\frac{\Theta(s)}{Vi(s)} = \frac{10.31}{s(0.16s + 1)} \quad (53)$$

con la estrategia robusta, cuya ley de control resultante es :

$$G_c(s) = \frac{K_R(s + 13.65)}{(s + 36.9 + j37.1)(s + 36.9 - j37.1)} \quad (54)$$

Se realizará la planificación de la ganancia  $K_R$  que originalmente es 73, mediante lógica *fuzzy*. El diagrama de bloques del sistema de control es el siguiente:

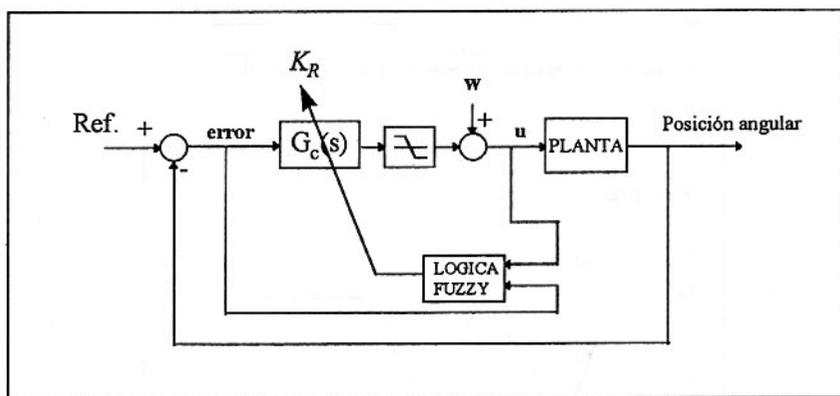


Figura No.7. Esquema general del controlador propuesto.

El sistema de lógica *fuzzy* recibe como entradas la acción de control  $u$  y el error sobre la consigna de control. Además, el sistema tiene una perturbación en la entrada de la planta, denominada como  $w$ . La salida del controlador  $C(s)$  tiene una no linealidad tipo saturación que modela la saturación de los actuadores, en este caso de  $\pm 5$  voltios.

A partir de estas entradas se calcula el valor de  $K_R$  según los conjuntos *fuzzy* las reglas planteadas.

El diseño de las reglas y conjuntos es como sigue.

Se tienen las siguientes etiquetas para los conjuntos o funciones de membresía:

- G: grande
- M: mediano.
- P: pequeño.

Estas fueron utilizadas en todos los conjuntos para las dos entradas. .

Para las entradas se tienen las siguientes funciones de membresía de forma triangular, como se presenta en la figura No.8. De la misma forma se presentan las funciones de pertenencia para el error de seguimiento y la ganancia  $K_R$  en las figuras No.9 y No.10 respectivamente.

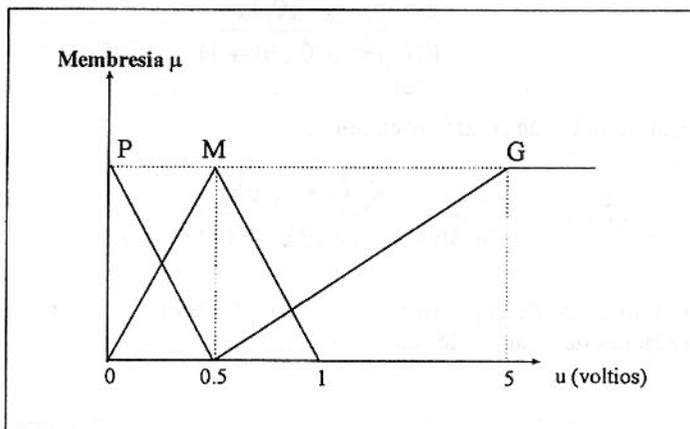


Figura No.8. Funciones de pertenencia para la acción de control

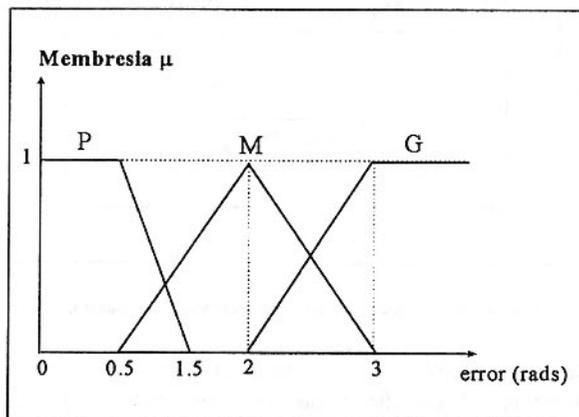
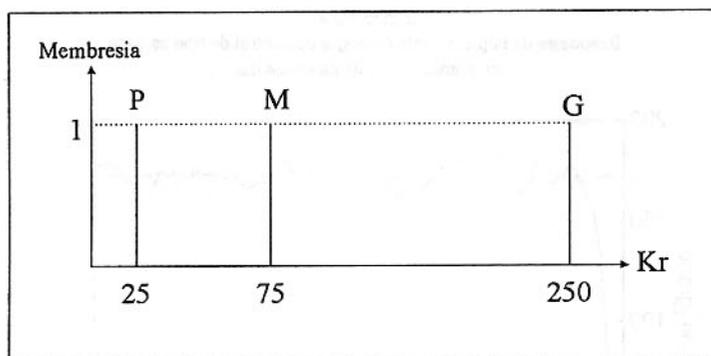


Figura No.9. Funciones de pertenencia para el error de seguimiento

Figura 10. Funciones de pertenencia para la Ganancia  $K_R$  (Salida).

En la tabla No.1 se muestran las reglas que definen la ganancia  $K_R$  en función del error y la acción de control.

Tabla 1. Reglas para el planificador difuso.

u \ e	P	G	M
P	G	M	P
M	G	P	P
G	G	P	P

e: error sobre la consigna de control

u: acción de control (voltaje).

### 3.2 Simulaciones

El gráfico No.1 presenta los resultados de la simulación realizada para el control robusto diseñado sin planificación de la ganancia, esto es, con  $K_R = 73$ . Se consideró una perturbación de tipo ruido blanco aditiva a la acción de control, con variaciones en el rango de  $\pm 0.15$  voltios. La saturación en los actuadores se dispuso en  $\pm 5$  voltios. La respectiva acción de control se presenta en el gráfico No.2.

En este primer gráfico se puede observar la respuesta de la planta ante una consigna de control de tipo escalón (línea punteada) de  $171.89^\circ$ .

Gráfico No.1.  
Respuesta de la planta ante consigna de control de tipo escalón  
sin planificación de ganancia  $K_R$ .

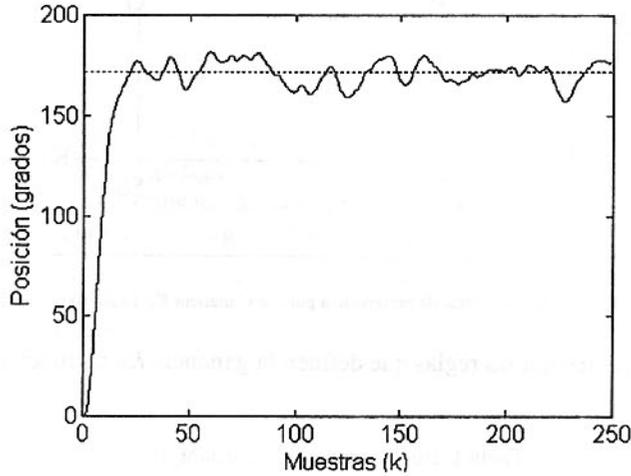
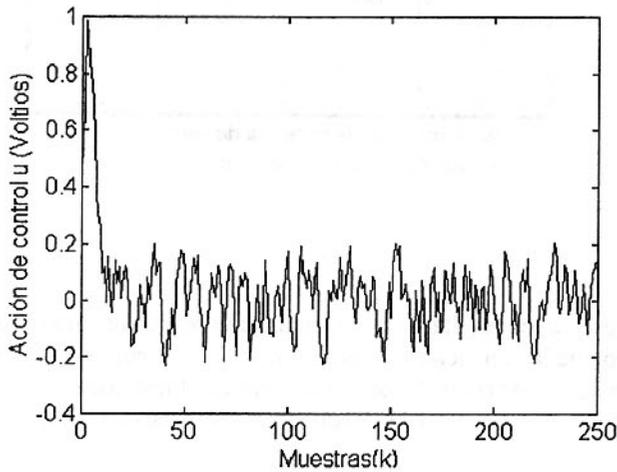


Gráfico No.2.  
Acción de control robusto para  $K_R = 73$ .



Se realizó luego la misma prueba de control bajo las mismas condiciones pero utilizando la planificación difusa de la ganancia. La respuesta del sistema de control se presenta en el gráfico No.3, a su vez se presenta en el gráfico No.4 la acción de control.

Gráfico No.3.  
Respuesta de la planta ante consigna de control de tipo escalón  
con planificación de ganancia difusa en  $K_R$ .

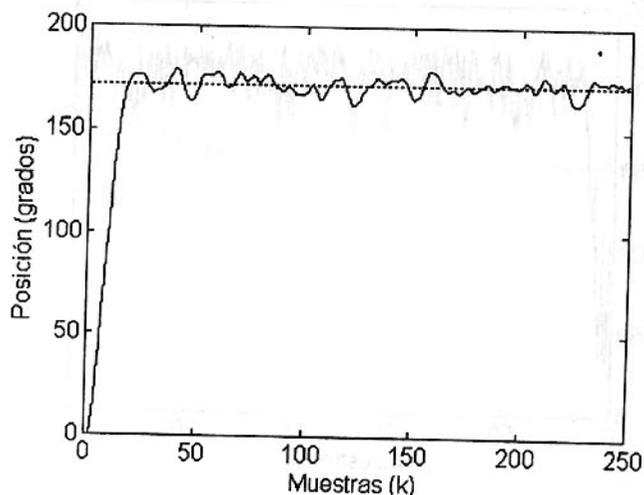
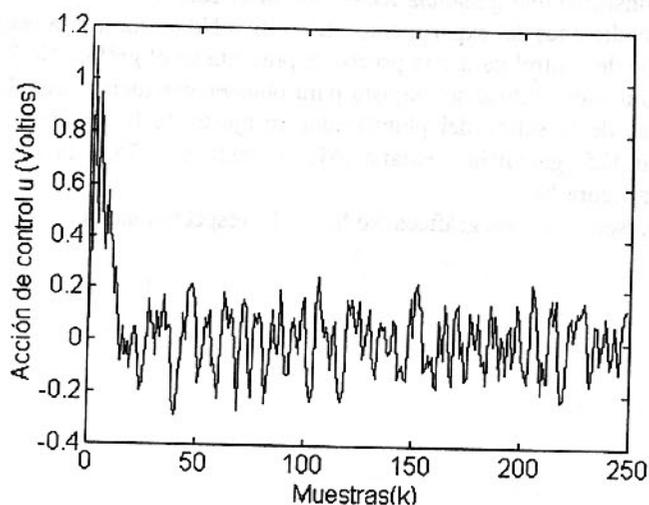
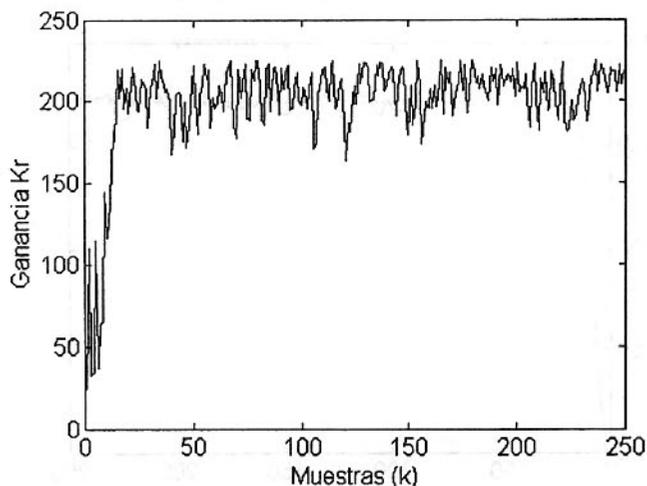


Gráfico No.4.  
Acción de control con planificación difusa de la ganancia  $K_R$ .



El gráfico No.5 presenta la variación de la ganancia  $K_R$  durante la prueba de control. Esta variación se presenta debido a la acción planificadora de la lógica difusa que se incorporó en el diseño.

Gráfico No.5.  
Comportamiento de la ganancia  $K_R$



Se realizó una última prueba considerando ganancias altas en el controlador, tanto en el modo planificado como en el control original.

Primeramente se consideró una ganancia  $K_R = 730$  en el control robusto. Se realizó la misma prueba con las mismas condiciones del experimento. El gráfico No.6 muestra la respuesta de la salida del servomotor. La acción de control para esta prueba se presenta en el gráfico No.7.

Por su parte el planificador difuso se reajustó para obtener ganancias más altas. Para esto las funciones de pertenencia de la salida del planificador se ajusta de la siguiente forma: ganancia pequeña (**P**) centrada en 125, ganancia mediana (**M**) centrada en 275 y la ganancia grande (**G**) centrada en 400, según la figura No.10.

Los resultados se presentan en los gráficos No.8, 9 y 10 respectivamente.

Gráfico No.6.  
Respuesta de la planta ante consigna de control de tipo escalón  
sin planificación de ganancia  $K_R$  ( $K_R=730$ ).

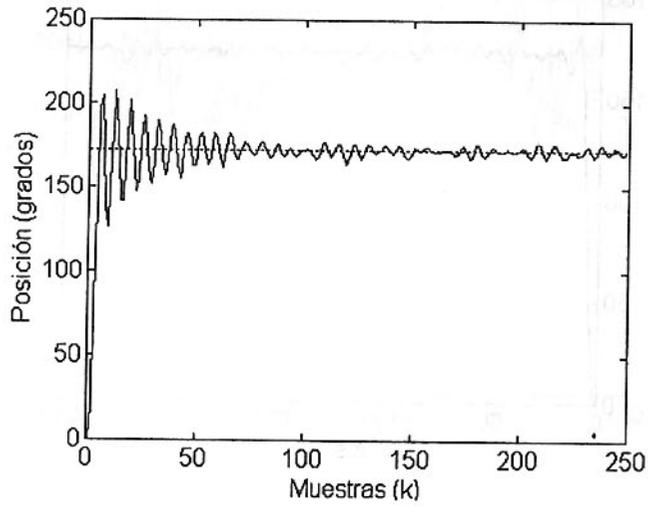


Gráfico No.7.  
Acción de control robusto para  $K_R = 730$ .

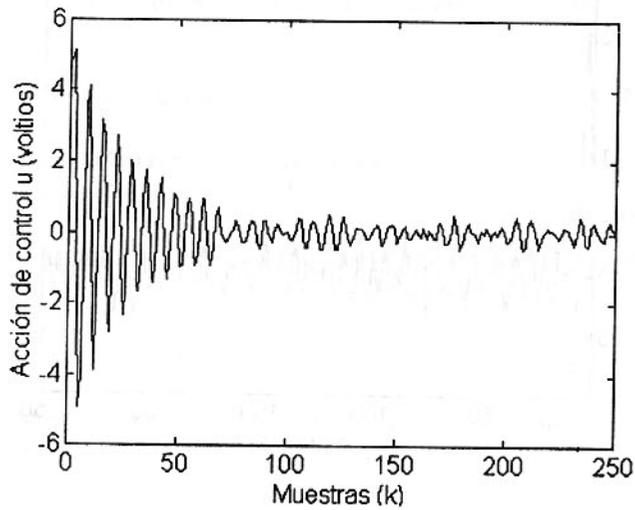


Gráfico No.8.  
Respuesta de la planta ante consigna de control de tipo escalón  
con planificación de ganancia difusa en  $K_R$  (ganancias altas).

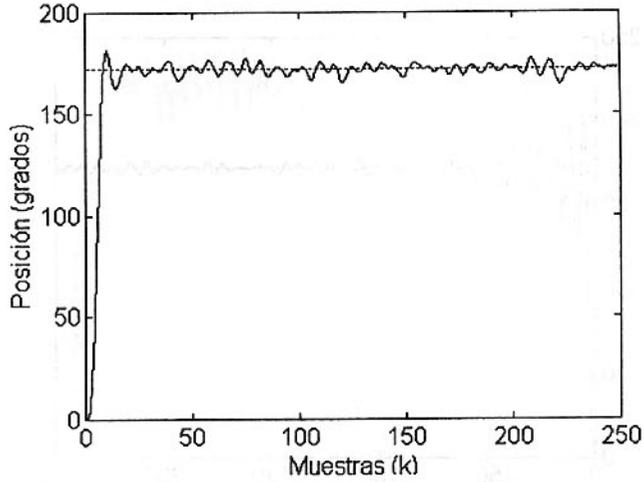


Gráfico No.9.  
Acción de control con planificación difusa de la ganancia  $K_R$  (ganancias altas).

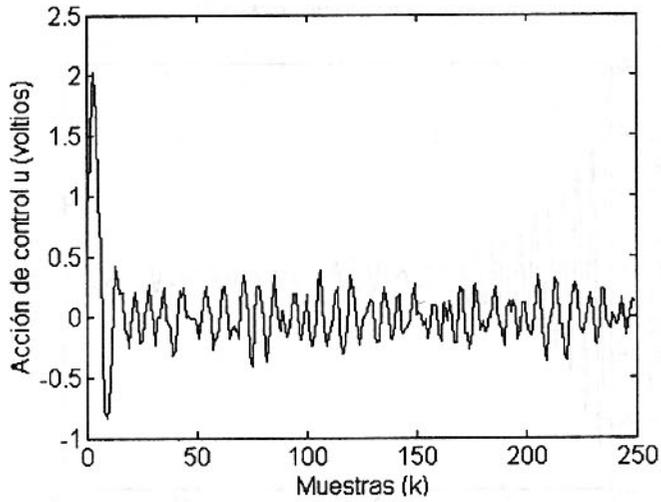
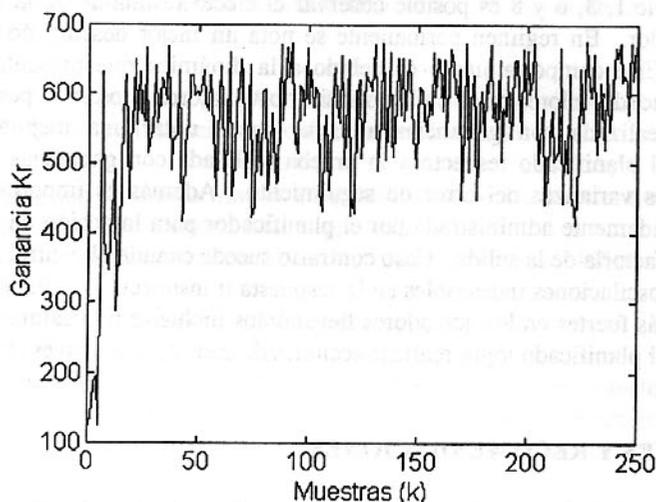


Gráfico No.10.  
Comportamiento de la ganancia  $K_R$  (ganancias altas).



### 3.3 Análisis de los resultados

Se obtuvieron las varianzas de las salidas planificada y no planificada a partir de la muestra No.20 para observar la mejoría dada por la planificación difusa de la ganancia, los resultados son los siguientes:

#### 1era. Prueba, ganancias bajas:

-varianza del error de consigna para control robusto sin planificación de ganancia =  $34.451 \sigma^2$  ( $K_R = 73$ ).

-varianza del error de consigna para control robusto con planificación de ganancia =  $13.410 \sigma^2$ .

#### 2da. Prueba, ganancias altas:

-varianza del error de consigna para control robusto sin planificación de ganancia =  $30.143 \sigma^2$  ( $K_R = 730$ ).

-varianza del error de consigna para control robusto con planificación de ganancia =  $5.810 \sigma^2$ .

Como se nota, en ambas pruebas, el comportamiento en régimen permanente se mejora con la planificación difusa que intenta dar una ganancia pequeña en los transitorios y una ganancia alta en el

permanente para disminuir la varianza de la salida sobre la consigna de control, tal como se presenta en la figura No.13.

En los gráficos No.1, 3, 6 y 8 es posible observar el efecto resultante de la planificación de la ganancia del controlador. En régimen permanente se nota un mejor desempeño dado el efecto del planificador difuso. Este comportamiento es debido a la dinámica que presenta la ganancia  $K_R$  (gráfico No.3), produciendo valores bajos en los transitorios y valores altos en el permanente.

En la prueba realizada con ganancias altas se puede notar una mejora sustancial en el desempeño del control planificado respecto a la prueba realizada con ganancias bajas, tal como lo demuestran los valores varianzas del error de seguimiento. Además es importante notar como la ganancia  $K_R$  es adecuadamente administrada por el planificador para la acción de control, resultando en una respuesta satisfactoria de la salida. Caso contrario sucede cuando el control tiene una ganancia fija alta, produciendo oscilaciones indeseables en la respuesta transitoria. Esto a su vez provoca acciones de control más fuertes en los actuadores llevándolos inclusive a la saturación (+/- 5 voltios), mientras que el control planificado logra realizar acciones de control más suaves (gráficos No.7 y 9).

#### 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- 1) Aunque el control robusto arroja un controlador con buen desempeño, el mismo puede actuar severamente en los actuadores si se utilizan ganancias altas. Así, resulta fácil incorporar una estrategia *fuzzy* que planifique la ganancia de salida del controlador sin sacrificar el nivel de comportamiento del sistema. En este trabajo se ha probado con éxito que la integración de técnicas robustas y *fuzzy* mejora considerablemente la actuación global del sistema.
- 2) Se muestra que es sencillo incorporar al diseño del controlador y de manera explícita especificaciones de desempeño y también de incertidumbre.
- 3) El planificador de ganancia difuso no requiere de una estructura muy compleja (no tiene muchas entradas ni muchas salidas) para mejorar el desempeño del controlador.
- 4) La planificación en el control puede ser abordada desde diferentes puntos de vista, en este caso optimizando la varianza del error en régimen permanente. También se puede estudiar el efecto de la planificación de la ganancia para optimizar el gasto energético del sistema (menor costo en los actuadores).
- 5) El enfoque utilizado en la construcción de observadores puede ser aplicado de manera inmediata a sistemas en los que exista más de un modelo del mismo sistema. Por ejemplo, si solo se conociera el ámbito de valores de la constante de tiempo o de ganancia del sistema.
- 6) Se podría disponer de diferentes tipos de planificadores difusos, en una misma estructura de control, para ser seleccionados dependiendo de las condiciones y necesidades de control, por ejemplo, índices de desempeño. La selección de este planificador podría a su vez ser realizada mediante otro sistema difuso encargado de analizar las condiciones requeridas y existentes para el control.
- 7) El sistema presenta gran robustez a la presencia de tiempos muertos hasta del orden de 0.5 segundos.

## 5. REFERENCIAS

- 1 Y. F. Li y C.C. Lau. Development of Fuzzy Algorithms for servosystems, *IEEE Control Systems Magazine*, No.4, pp. 65-72, 1989.
- 2 Soucek, Branco. "Fuzzy, Holographic and Parallel Intelligence: The Sixth-Generation Breakthrough". Wiley-Interscience Publication. USA, 1992.
- 3 Gahinet y Apkarian. A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, pp. 421-448, 1994.
- 4 Morari y Zafirou. "Robust Process Control". Prentice Hall Inc., 1989.
- 5 L. A. Zadeh. Fuzzy Sets, *Inform. Contr.*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- 6 Zames, G. "Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 26, No. 2, pp. 301-320, 1981.
- 7 Doyle, Glover, Khargonekar y Francis. State-Space Solution to the Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 34, No. 8, pp.831-847, 1989.
- 8 Zhou y Khargonekar. An Algebraic Equation Riccati Equation Approach to  $H_\infty$  Optimization, *Systems & Control Letters*, vol 11, pp. 85-91, 1988.
- 9 Geromel, Peres y Souza.  $H_2$  Guaranteed Cost Control for Uncertain Continuous Time Linear Systems, *Systems & Control Letters*, No 19, pp. 23-27, 1992.
- 10 Iwasaki y Skelton. All Controllers for General Control Problems: LMI Existence and Conditions and State Space Formulas, *Automática*, vol. 30 No. 8, pp. 1307-1317, 1994.
- 11 Gahinet, Nemirovski, Laub, Chilali. "LMI Control Toolbox". The MathWorks, Inc. USA, 1995.
- 12 Chilali y Gahinet.  $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 41, No. 3 pp. 358-367, 1996.
- 13 Feedback Limited. "Technical Notes: Servosystem ES130". London, 1972.
- 14 Phillips y Harbor. "Feedback Control Systems". Prentice Hall Inc, 1991.
- 15 Terano, Toshiro; Sugeno, Michio; Asai, Kiyoji. "Fuzzy Systems Theory and Its Applications". Academic Press Inc. USA, 1987.
- 16 Jiménez A., Agustín y otros. "Curso de Control Inteligente de Procesos". Universidad Politécnica de Madrid. Madrid, 1992.

- 17 Lechtman K., Salomón. "*Control por Microcomputador de un Servomotor*". Universidad de Costa Rica, 1982.
- 18 Mazón G., Ismael. "*Notas del Curso Control Digital*". Universidad de Costa Rica. Costa Rica, 1995.
- 19 Ogata, Katsuhiko. "*Ingeniería de Control Moderna*". Prentice Hall, México, 1993.
- 20 Spiegel, Murray. "*Probabilidad y Estadística*". McGraw-Hill. México, 1976.