Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 1998 **5**(2) : 125–131
cimpa – ucr – ccss   issn: 1409-2433

UNA VERSIÓN PROFESOR–GRUPO–AULA DEL PROBLEMA DE HORARIOS

Ramiro José Cáceres Espinoza*

Recibido: 15 diciembre 1997

Resumen

Se presenta un problema de horarios que incluye además de la asignación de espacios de tiempo (turnos) a actividades docentes, la asignaciòn a estas de aulas con capacidades que pueden ser distintas y que suponemos disponibles en todos los turnos.

Probando que una sencilla condición garantiza que las actividades en cada turno son acomodables en las aulas disponibles, se concluye que la asignación de las actividades usando la cantidad mínima de turnos puede hacerse en tiempo polinomial.

Palabras clave: investigación de operaciones, optimización combinatoria, problema de horarios.

Abstract

We present the schedule problem that include, in addition to the assignment of timing to teaching actvities, the assignment of these activities to classrooms with different capacities, and that are supposed available at every time.

We prove that a simple condition guaranties that activities at each time can be arranged in the classrooms, and we conclude that assignement of activities using the minimum number of times can be made in a polynomial time.

Keywrods: operations research, combinatorial optimization, schedule problem.

AMS Subject Classification: 90B99, 68Q25

*Departamento de Matemáticas y Estadstica, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León, Nicaragua.

1. Introducción

Problemas de diseño de horarios docentes y sus relaciones con grafos, apareamientos, así como su complejidad algorítmica son bien conocidos (vea [2], [3]). Aquí nos ocupamos con una versión del problema clásico de horarios que considera, además de la asignación de turnos a las actividades docentes. la asignación de aulas a stas. Como condiciones se imponen en este caso, el que los grupos de estudiantes son disjuntos y que las aulas, grupos y profesores están disponibles en todos los turnos.

La prueba de una sencilla condición garantiza que el conjunto de actividades es acomodable en las aulas, y permite seguir un procedimiento similar al que aparece descrito en [1] y [4], y concluir que la solución del problema se reduce a la ampliación del grafo bipartito asociado al problema y a la posterior deteminación sucesiva de apareamientos completos del grafo ampliado. De este procedimiento se concluye que el problema puede ser resuelto en tiempo polinomial.

2. Definición del Problema

Consideramos el problema de asignar espacios de tiempo en $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$, y aulas de clases en $R = \{r_1, \ldots . r_s\}$ a un conjunto de actividades docentes E, que corresponden a grupos disjuntos de estudiantes en $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$, y que son cubiertas por profesores de $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$.

Para esto suponemos además que:

a) los grupos, y también las aulas, están ordenados según su tamaño de mayor a menor, esto es que $|g_1| \geq \ldots \geq |g_n|$ y $K(r_1) \geq \ldots \geq K(r_s)$, donde $K(r_j)$ representa la capacidad del aula r_j y $|g_i|$representa el tamaño del grupo i.

b) las aulas en R están disponibles en todos los tiempos $t_1, \ldots, t_k$.

Para la planificación de las actividades docentes disponemos de :

a) los requerimientos de actividades por grupo y por profesor expresados en una matriz $m \times n$ $C = (c_{i,j})$,donde $c_{i,j}$ representa la cantidad de espacios de tiempo en que el profesor i debe encontrarse con el grupo j.

b) las relaciones entre tamaños de grupos y tamaños de aulas expresados mediante un vector de n componentes $a = (a_i)$, donde $a_i, 1 \leq a_i \leq s$, es el índice del aula más pequeña en la que cabe el grupo i, esto es $|g_i| \leq K(r_j)$ para $1 \leq j \leq a_i$, y $|g_i| > K(r_{a_i+1})$.(Note que si $a_i = j$, entonces el grupo i puede ubicarse en cualquiera de las aulas $r_1, \ldots, r_j$)

El propósito es diseñar un horario docente que cumpla con restricciones elementales como son:

1. Un profesor o un grupo no debe ser asignado a dos actividades al mismo tiempo.
2. Las actividades de cada período de tiempo deben poder ser asignadas a aulas en las que alcancen, sin que dos de ellas correspondan a la misma aula.

3. Definiciones y Notación

- En adelante cuando nos refiramos a un conjunto de grupos (de aulas), supondremos que los grupos (las aulas) están ordenados de mayor a menor según su tamaño (capacidad).

- Dado un conjunto Z de grupos (de profesores), llamamos $B(Z)$ al conjunto de todas las actividades docentes cuyo grupo (profesor) est en Z.

- Para denotar el grado de un vértice x en un grafo usamos el símbolo $\mathrm{grd}(x)$.

- Si $i_1 < \ldots < i_q$ son todos los índices para los cuales vale $a_{i_j} < i_j$, $j \in \{1, \ldots, q\}$, denotamos mediante G_j al conjunto $\left\{g_1, \ldots, g_{i_j}\right\}$, $j \in \{1, \ldots, q\}$ .A los a_{i_j} respectivos los denotamos mediante $b_{j.}$.

- Decimos que $G' \subseteq G$ es acomodable en $\mathbb{R}$, si existe una asignación de grupos de aulas, tal que todo grupo alcance en el aula asignada y siempre dos grupos distintos tengan asignadas aulas distintas.

4. Proposiciones

Proposición 1 *$G' = \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_w}\} \subseteq G$ es acomodable en $\mathbb{R}$ si, y sólo si $a_{i_j} \geq j$, para todo $j \in \{1, \ldots, w\}$.*

DEMOSTRACIN: Veamos primero la condicin necesaria.
Sea G' acomodable en $\mathbb{R}$. Razonemos inductivamente

i) Se cumple que $a_{i_1} \geq 1$.
Para todo i vale, $a_i \geq 1$.

ii) Sea $a_{i_j} \geq j$, para $j, \geq 1$. Probemos que se cumple $a_{i_{j+1}} \geq j+1$.
Como los grupos están ordenados según su tamaño, vale $a_{i_{j+1}} \geq a_{i_j}$.
Si $a_{i_{j+1}} < j+1$,entonces $j \leq a_{i_j} \leq a_{i_{j+1}} < j+1$. De aquí resulta $a_{i_j} = a_{i_{j+1}} = j$. Esto significa que los grupos $g_{i_1}, \ldots, g_{i_j}, g_{i_{j+1}}$ solamente caven simultáneamente en las aulas $r_1, \ldots, r_j$. Como hay más grupos que aulas, estos grupos no son acomodables en $\mathbb{R}$, lo que contradice la hipótesis.

Veamos ahora la condicin suficiente.
Sea $G' = \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_w}\} \subseteq G$ que satisface $a_{i_j} \geq j, \forall j \in \{1, \ldots w\}$.

La asignación $g_{i_1} \to r_1, \ldots, g_{i_w} \to r_w$, es factible porque cada grupo es asignado a un aula en la que realmente cabe, y ademàs no hay dos grupos asignados a la misma aula. Esto significa que el conjunto de grupos es acomodable en $\mathbb{R}$. $\square$

Proposición 2 *$G' \subseteq G$ es acomodable en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, no existe $G'' \subseteq G'$ con $G'' \subseteq G_i$ y $|G''| > b_i \in \mathbb{R}$, para algún $i \in \{1, \ldots, q\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero la condición necesaria.
Sea $G' \subseteq G$ acomodable en $\mathbb{R}$, que contiene a $G'' = \{g_{j_1}, \ldots, g_{j_v}\}$ con $G'' \subseteq G_i$, $v := |G''| > b_i$, para algún $i \in \{1, \ldots, q\}$.
Como $G" \subseteq G_i$ y $v > b_i$,resulta $a_{j_v} \leq b_i < v$.
De la proposición 1 resulta entonces que G'' no es acomodable en $\mathbb{R}$.
El que G sea acomodable y contenga a G'' que no lo sea, es una contradicción.
Veamos ahora la condicin suficiente.
Sea $G' = \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_w}\} \subseteq G$ que no contiene ningún G'' con $G'' \subseteq G_i$ y $|G"| > b_i$.
Razonemos inductivamente

i) $\{g_{i_1}\}$ es acomodable en $\mathbb{R}$.
Si $\{g_{i_1}\}$no fuera acomodable en $\mathbb{R}$, según la proposición 1, $a_{i_1} < 1$. Esto contradice $a_j \geq 1, j = 1, \ldots, n$.

ii) Sea $\left\{g_{i_1}, \ldots, g_{i_j}\right\}, 1 \leq j < w$, acomodable en $\mathbb{R}$. Probemos que también $\left\{g_{i_1}, \ldots, g_{i_j}, g_{i_{j+1}}\right\}$ es acomodable en $\mathbb{R}$.
Como $\left\{g_{i_1}, \ldots, g_{i_j}\right\}$ es acomodable en $\mathbb{R}$, según la proposición 1, $a_{i_1} \geq 1, \ldots, a_{i_j} \geq j$.
Si $a_{i_{j+1}} < j+1$, entonces $j \leq a_{i_j} \leq a_{i_{j+1}} < j+1$. Esto último implica $j = a_{i_j} = a_{i_{j+1.}}$
Entonces, como $a_{i_{j+1}} < j+1$, $\left\{g_1, \ldots, g_{i_{j+1}}\right\}$ corresponde a algún G_{i_0} con $b_{i_0} = j$.
Así $G'' = \left\{g_{i_1}, \ldots, g_{i_{j,}} g_{i_{j+1}}\right\} \subseteq G'$ satisaface $G'' \subseteq G_{i_0}$ y $|G''| = j+1 > j > b_{i_0}$. Esto contradice la hipótesis. $\square$

Note que la proposición anterior establece que $G \subseteq G$ es acomodable en $\mathbb{R}$ si, y sólo si G' no contiene más b_i elementos de G_i, para algún $i \in \{1, \ldots q\}$.

Un problema de diseño de horarios es normalmente modelado, como un problema de grafos. Para esto se construye un multigrafo bipartito $H = (G, P; E)$ teniendo como vértices los elementos de G y P. Dos vértices g_i y $p_j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$, son unidos mediante $c_{i,j}$ aristas paralelas. Con esto cada arista entre g_i y p_j representa una actividad docente del grupo i que debe ser cubierta por el profesor j.

El problema planteado al inicio es, en términos del multigrafo anterior: determinar k apareamientos del multigrafo H que lo particionen, de tal manera que las actividades docentes en cada apareamiento sean acomodables en $\mathbb{R}$. Dicho en términos de la proposición 2: determinar k apareamientos $E_1, \ldots, E_k$ de E, que particionen a E, de tal manera que se cumpla $|B(G_i) \cap E_j| \leq b_i$, para $i = 1, \ldots, q, j = 1, \ldots, k$.

La siguiente proposicin da una condición suficiente para la existencia de la solución del problema de horarios, ver también [1, teorema 2], [6, teorema 2.1] y [4, proposicin 3].

Proposición 3 *Sean dados el multigrafo bipartito* $H = (G, P, E)$ *y la familia* $G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_q$ *definidos antes. Si* $\alpha = \text{máx}\{\text{grd}(g_i) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$, $\beta = \text{máx}\{\text{grd}(p_j) : j \in \{1, \ldots, m\}\}$, $\chi = \lceil \text{máx}\{|B(G)|/b_i : i \in \{1, \ldots, q\}\} \rceil$, *y* $k = \text{máx}\{\alpha, \beta, \chi\}$, *entonces existen apareamientos* $E_1, \ldots, E_k$ *que particionan a* E *y satisfacen* $|B(G_i) \cap E_j| \leq b_i, i = 1, \ldots, q, j = 1, \ldots, k$.

DEMOSTRACIÓN:

A. Ampliamos el grafo $H = (G, P, E)$ a un grafo $H' = (G', P', E')$ $k-$regular con $|G'| = |P'|$, que tenga la propiedad siguiente: si M' es un apareamiento completo en H' y $M = E \cap M'$, entonces $|B(G_i) \cap M| \leq \lceil |B(G_i)|/k \rceil$, para $i = 1, \ldots, q$.

1. Para que $|G'| = |P'|$, agregamos $v = |G| - \lfloor |B(G)|/k \rfloor \geq 0$ vertices ficticios a P para formar P'. y $\mu = |P| - \lfloor |B(P)|/k \rfloor \geq 0$ vértices ficticios a G para formar G'.
2. Completamos los grados de los vértices en P, uniendo los vértices de P con los μ vértices ficticios de G', de tal forma que estos alcancen grado k y que el grado en cada vértice ficticio no exceda k (esto se puede hacer, pues $k|P| - |B(P)| \leq k\mu$). Cuando $|B(P)/k|$ no es entero, no todos los vértices ficticios en G' alcanzan con esto el grado k. En total faltan a los vértices ficticios G', $|B(P)| - k\lfloor |B(P)|/k \rfloor < k$ aristas para que todas tengan grado k. En este caso construimos las aristas de tal manera que sea el último vértice ficticio de G' el único que no alcance grado k.
3. Completamos los grados de los vértices en G. Para $i = 1, \ldots, q$ unimos los vértices en G_i solo con los vértices en S_i, formado por los $v_i = |G_i| - \lfloor B(G_i)/k \rfloor \geq 0$ primeros vértices ficticios de P', de tal manera que los vértices de G_i lleguen a tener grado k, sin que los ficticios tengan grado que exceda a k (esto es posible, pues $kv_i \geq k|G_i| - |B(G_i)|$). Cuando $|B(G_i)|/k$ no es entero, no todos los vértices ficticios en S_i alcanzan con esto el grado k. En total faltan a los vértices de $S_i, |B(G_i)| - k\lfloor B(G_i)/k \rfloor < k$ aristas para que todas tengan grado k. En este caso construimos las aristas de tal manera que sea el último vértice en S_i el único que no tenga grado k.
   Si $|B(G)|/k$ no es entero, el último vértice ficticio de P' no alcanza con esto el grado k, le faltan $|B(G)| - k\lfloor |B(G)|/k \rfloor < k$ aristas. Completamos entonces los grados de los dos últimos vértices ficticios en G' y P' trazando entre ellos la cantidad necesaria de aristas (esto puede hacerse, pues $|B(P)| = |B(G)|$).
4. Notemos ahora que un apareamiento completo M' en H' cubre a G_i y S_i y que la cantidad de aristas reales de M' que están en $B(G_i)$ (es igual a la cantidad de vértices en G_i menos la cantidad de aristas ficticias que conecten con los vértices en G_i) es menor o igual que $|G_i| - (v_i - 1)$, pues las únicas aristas ficticias que conectan con G_i tienen extremos en S_i, y todas las aristas ficticias que cubren S_i, excepto probablemente la última, tienen extremos en G_i. Así, si M es el conjunto de aristas reales en un apareamiento completo M' de H', entonces $|B(G_i) \cap M| \leq |G_i| - (v_i - 1) = \lceil |B(G_i)|/k \rceil$.

B. Construído el grafo H', construimos un apareamiento completo E_1 de H' (este existe pues H' es k–regular y $|G'| = |P'|$). Como E_1 cubre a G_i y $S_i, i = 1, \ldots, q$, entonces el conjunto de aristas reales E_1 de E_1 satisface $|B(G_i) \cap E_1| \leq \lceil |B(G_i)|/k \rceil$.
Eliminamos las aristas en E_1 del grafo H' y obtenemos así un grafo $(k-1)$ regular H'', para el cual de nuevo podemos calcular un apareamiento completo E_2

con conjunto de aristas reales E_2 con conjunto de aristas reales E_2 que satisface $|B(G_i) \cap E_2| \leq \lceil |B(G_i)| / k \rceil$.
Repitiendo este procedimiento obtenemos los apareamientos $E_1, \ldots, E_k$ en los que están contenidas todas las aristas reales de H y que satisfacen $|B(G_i) \cap E_j| \leq \lceil |B(G_i)| / k \rceil$. Considerando ahora que $k \geq \lceil |B(G_i)| / b_i \rceil$, obtenemos que $\lceil |B(G_i)| / k \rceil \leq b_i$. $\square$

Proposición 4 *En la proposición 3, k es el más pequeño entero positivo para el cual vale la conclusión.*

DEMOSTRACIN: Supongamos que existe un apareamiento $E_1, \ldots, E_k$ que particiona a E, para la cual se cumple $|B(G_i) \cap E_j| \leq b_i, i = 1, \ldots, q, j = 1, \ldots, k$ con $k < \max\{\alpha, \beta, \chi\}$.

1. Si $\max\{\alpha, \beta, \chi\} = \alpha > k$, existe un grupo g_i con $\operatorname{grd}(g_i) = \alpha$. Note que $B(g_i) \cap E_{1,} \ldots, B(g_i) \cap E_k$ particionan a $B(g_i) \subseteq E$ y como los $E_1, \ldots, E_k$ son apareamientos de E, entonces $\alpha = |B(g_i)| = |B(g_i) \cap E_1| + \ldots + |B(g_i) \cap E_k| \leq k$, lo que contradice la suposición inicial.

2. De manera análoga se obtiene una contradicción si $\max\{\alpha, \beta, \chi\} = \beta > k$.

3. Si $\max\{\alpha, \beta, \chi\} = \chi > k$, existe $i \in \{1, \ldots, q\}$ tal que $k < \lceil |B(G_i)| / b_i \rceil$. De aquí resulta $k < \left|B(G_{i)}\right| / b_i \leq \lceil |B(G_i)| / b_i \rceil$. Como antes $B(G_i) \cap E_1, \ldots B(G_i) \cap E_k$ particionan a $B(G_i)$, como se cumple la conclusión de la proposición 3, entonces $|B(G_i)| = |B(G_i) \cap E_1| + \ldots + |B(G_i \cap E_k| \leq kb_i$, lo que contradice $k < |B(G_i)| / b_i$. $\square$

5. El algoritmo para resolver el problema de horarios

De la prueba de la proposición 3 se ve que la solución al planteado puede darse, como en [2] [3], siguiendo los pasos:

a) Construya el grafo ampliado H'

b) Para $i = 1, \ldots, k$

   b.1) Construya un apareamiento completo M_i de H'.

   b.2) Haga $E_i = M_i \cap E$.

   b.3) Actualice H' eliminando de H' las aristas en M_i.

Para la implementación del algoritmo anterior, la construcción del grafo ampliado H' puede hacerse usando una regla de la esquina noroeste (vea [5]). Como se discute en [3] , la complejidad del algoritmo est dominada por la del paso b.1), el cual puede ser implementado construyendo una red de flujo 0-1 asociada al grafo H' y calculando el flujo máximo, con complejidad polinomial $0((n + \mu + 1)^{\frac{5}{2}})$. (vea [2])

Referencias

[1] Even, S.; Idtai, A.; Shamir, A. (1976) "On the complexity of time-table and multicommodity flow problems", *SIAM Journal on Computing* **5**: 691–703.

[2] Jungnickel, D. (1987) *Graphen, Netzwerke und Algorithmen.* Bibliographiches Institut Mannheim/Wien/Zurich.

[3] Thulasiraman, K.; Swamy, M.N.S. (1982) *Graphs: Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons, New York.

[4] de Werra, D. (1985) "Graphs, Hypergraphs and Timetabling", *Methods of Operations Research* **49**: 201–213.

[5] de Werra, D. (1981) "Remarks on the requirement matrix of school timetabling. Problems and regular embeddings", *European Journal of Operational Research* **6**: 298–301.

[6] de Werra, D. (1979) "On the use of alternating chains and hypergraphs in edge coloring", *Journal of Graph Theory* **3**: 175–182.