Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2007 **14**(2) : 165–176
cimpa – ucr issn: 1409-2433

FUNCIONES ABSTRACTAS DE P–VARIACIÓN ACOTADA

Yunied Puig de Dios* Rita A. Roldán Inguanzo†

Recibido/Received: 22 Feb 2006; Aceptado/Accepted: 13 Jun 2007

Resumen

La investigación que nos ocupa se dedica a extender los resultados de Gelfand respecto a las funciones abstractas de variación acotada a las funciones abstractas de p-variación acotada en un sentido análogo al Teorema de Representación de Riez, con el objetivo de aplicar dicha extensión al estudio del espacio de las funciones absolutamente p-continuas. En este trabajo se introducen los espacios de las funciones abstractas de p-variación acotada fuerte y débil en un intervalo y se estudian sus principales propiedades. Se define la integral abstracta de Stieltjes en la búsqueda de un teorema análogo al de Representación de Riesz y se encuentra una representación de los operadores lineales continuos del espacio de las funciones absolutamente p-continuas sobre un intervalo en un espacio normado débilmente completo a través de las funciones abstractas de p-variación acotada.

Palabras clave: Análisis funcional, operadores, funciones de p-variación acotada, funciones absolutamente p-continuas.

Abstract

This investigation dedicates to extend the results of Gelfand regarding the abstract functions of bounded variation to the abstract functions of bounded p-variation in a sense similar to the Theorem of Representation of Riez, with the objective of applying this extension to the study of the space of the absolutely p-continuous functions. In this work the spaces of the abstract functions of strong and weak bounded p-variation in an interval are introduced and their main properties are studied. The abstract integral of Stieltjes is defined in the search of a theorem similar to that of Representation of Riesz and a representation of the continuous lineal operators of the space of the absolutely p-continuous functions on an interval in a normed weakly complete space through the abstract functions of bounded p-variation is found.

*Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de la Habana, San Lázaro y L, La Habana CP 10400, Cuba. E-Mail: puig@lab.matcom.uh.cu.

†Misma dirección. E-Mail: rroldan@matcom.uh.cu.

Keywords: Functional analysis, operators, functions of bounded p-variation, absolutely p-continuous functions.

Mathematics Subject Classification: 46E15.

1 Introducción

En el Análisis Funcional, el problema de la representación de los funcionales lineales continuos sobre un espacio dado, juega un papel esencial. La resolución de dicho problema se hace particularmente difícil en el caso de espacios de funciones, resultando que, en la mayoría de los casos, los elementos del espacio dual sólo pueden ser representados a través de clases de equivalencia. Un avance significativo en este sentido lo obtiene F. Riesz a principios del siglo pasado, al encontrar una representación de los funcionales lineales continuos sobre el espacio de las funciones absolutamente continuas sobre un intervalo. Este resultado se conoce con el nombre de Teorema de Representación de Riesz. A finales de los años 30 del siglo pasado se generalizan los conceptos de funciones absolutamente continuas y de variación acotada a funciones absolutamente p-continuas y de p-variación acotada respectivamente, siendo $1 < p < \infty$ (ver [3]) y se comienzan a estudiar las propiedades fundamentales de los respectivos espacios de funciones. Es ya en esa época que aparece el interés por demostrar un teorema análogo al Teorema de Representación de Riesz. Todos los intentos en ese sentido resultaron infructuosos hasta que en 1984 el matemático ruso S. V. Kisliakov (ver [2]) logra (por vías indirectas) demostrar isometría entre el espacio bidual al espacio de las funciones absolutamente p-continuas y el espacio de las funciones de p variación acotada sobre el mismo intervalo. Este resultado incentivó aún más el interés por encontrar una representación de los elementos del dual al espacio de las funciones absolutamente p-continuas, de la cual se conjeturaba una estrecha relación con el espacio de las funciones de p variación acotada con p, q respectivamente conjugados. Es finalmente en el año 1989 cuando R. Roldán (ver [5]) logra encontrar tal representación, demostrándose sin embargo la imposibilidad de la isometría entre ambos espacios. Ello mantiene entonces abierta la pregunta sobre la forma exacta del dual al espacio de las funciones absolutamente p-continuas. Por otra parte, en su tesis de 1935, I. M. Gelfand (ver [1]) extiende la definición de función de variación acotada a función abstracta de variación acotada y generaliza el Teorema de Representación de Riesz, demostrando que el espacio de los operadores lineales y continuos del espacio de las funciones absolutamente continuas sobre un intervalo en un espacio normado débilmente completo es isomorfo al espacio de las funciones abstractas de variación acotada. En este trabajo se introducen los espacios de las funciones abstractas de p-variación acotada fuerte y débil en un intervalo y se estudian sus principales propiedades. Se define la integral abstracta de Stieltjes en la búsqueda de un teorema análogo al de Representación de Riesz y se encuentra una representación de los operadores lineales y continuos del espacio de las funciones absolutamente p-continuas sobre un intervalo en un espacio normado débilmente completo a través de las funciones abstractas de p-variación acotada, la cual, como era de esperar, no resulta ser una isometría.

2 Los espacios $VAF_p^E[a,b]$ y $VAD_p^E[a,b]$ de funciones abstractas de p-variación acotada fuerte y débil

Los espacios de funciones de p-variación acotada ($V_p[a,b]$) anteriormente mencionados, pueden ser generalizados de la siguiente manera:

Definición 1 *La función abstracta $X : [a,b] \longrightarrow E$ se dice de p-variación acotada fuerte en $[a,b]$ con $1 \leq p < \infty$ si y solo si, existe un número real M tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \|X(t_i) - X(t_{i-1})\|^p \leq M$$

para cualquier partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a,b]$ y para todo n natural.

En ese caso se llama p-variación fuerte de X al valor

$$VF_p^E(X) = \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \|X(t_i) - X(t_{i-1})\|^p \right)^{1/p},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π de $[a,b]$.

Definición 2 *Dado $1 \leq p < \infty$, se llama espacio de las funciones abstractas de p-variación acotada fuerte en $[a,b]$ al espacio de las funciones abstractas*

$$VAF_p^E[a,b] \quad = \quad \left\{X : [a,b] \longrightarrow E;\ X(a) = 0,\ VF_p^E(X) < \infty\right\}.$$

De modo análogo se puede introducir el espacio de las funciones abstractas de p-variación acotada débil.

Definición 3 *La función abstracta $X : [a,b] \to E$ se dice de p-variación acotada débil ($1 < p < \infty$) si y solo si para toda $f \in E^*$ la función real $fX(\cdot)$ es de p-variación acotada en $[a,b]$ (ver [3]). En ese caso se denota al espacio de las funciones abstractas de p-variación acotada débil*

$$VAD_p^E[a,b] \quad = \quad \{X : [a,b] \longrightarrow E;\ X(a) = 0,\ fX \in V_p[a,b]\ \forall f \in E\}.$$

La siguiente proposición justifica el uso de las denominaciones de p-variación acotada fuerte y débil.

Proposición 1 *Se cumple $VAF_p^E[a,b] \subset VAD_p^E[a,b]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X \in VAF_p^E[a,b]$. entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \|X(t_i) - X(t_{i-1})\|^p \leq M$$

para toda partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si $f \in E^*$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |fX(t_i) - fX(t_{i-1})|^p &= \sum_{i=1}^{n} |f(X(t_i) - X(t_{i-1}))|^p \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|f\|^p \, \|X(t_i) - X(t_{i-1})\|^p \leq \|f\|^p \, M.\end{aligned}$$

Luego, $(V_p(fX(t))^p \leq \|f\|^p \, M$, por lo que $X \in VAD_p^E[a, b]$. ∎

Resulta sencillo demostrar la siguiente proposición que define una norma en el espacio $VAF_p^E[a, b]$ y determina bajo qué condiciones este espacio es de Banach (ver [4]).

Proposición 2 *El espacio $VAF_p^E[a, b]$ resulta un espacio normado con la norma $\|X\|_{VAF_p^E} = VF_p^E(X)$. Además, si E es de Banach, entonces $VAF_p^E[a, b]$ también lo es.*

A continuación se presentan algunas propiedades de las funciones abstractas de p-variación acotada fuerte. La demostración de estas propiedades resulta sencilla y similar al caso del espacio clásico $V_p[a, b]$ de las funciones de p-variación acotada (ver [4]).

Proposición 3 *Si $X \in VAF_p^E[a, b]$, entonces X es acotada en $[a, b]$.*

Proposición 4 *Si $X \in Lip_\alpha^E[a, b]$ $\quad (0 < \alpha \leq 1)$, entonces $X \in VAF_p^E[a, b]$.*
($X \in Lip_\alpha^E[a, b] \Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tal que $\|X(t_0) - X(t_1)\| \leq M \, |t_0 - t_1|^\alpha \quad \forall t_0, t_1 \in [a, b]$).

Proposición 5 *Si $1 \leq p < \infty$, entonces se cumple $VAF_p^E[a, b] \subset VAF_q^E[a, b]$ para todo $q > p$.*

Proposición 6 *El espacio $VAF_p^E[a, b]$ es no separable.*

Si se define la continuidad fuerte y/o débil de una función abtracta $X : [a, b] \to E$ en un punto $t_0 \in [a, b]$ a partir de la convergencia de $X(t)$ a $X(t_0)$ cuando $t \longrightarrow t_0$ en las topologías fuerte y/o débil respectivamente, entonces se cumple (ver [4]):

Proposición 7 *Si $X \in VAF_p^E[a, b]$, siendo E débilmente completo, entonces el conjunto de los puntos de discontinuidad débil de X es a lo sumo numerable.*

Igualmente, de modo análogo a la proposición 1 se cumple (ver [4]):

Proposición 8 *Sea la función abstracta $f : [a, b] \longrightarrow E^*$ y consideremos la función real $t \longmapsto f(t)(X)$ con $x \in E$ fijo. Si $f \in VAF_p^{E^*}[a, b]$, entonces $f(t)(X) \in V_p[a, b]$. De ello se deduce que*

(i) Para $\xi \in E^{**}$ la función $t \longmapsto \xi f(t)$ es de p-variación acotada en $[a, b]$.

(ii) Para $\xi \in E$ la función $t \longmapsto f(t)(x)$ es de p-variación acotada en $[a,b]$.

Siguiendo el mismo esquema de la proposición 7 para la p-variación acotada débil se demuestra (ver [4]):

Proposición 9 *Sea E un espacio normado separable y sea la función abstracta $f \in VAF_p^{E^*}[a,b]$ $(1 < p < \infty)$. Entonces el conjunto de los puntos de discontinuidad débil de f es a lo sumo numerable.*

Los siguientes teoremas tratan sobre la representación general de operadores lineales y continuos que aplican a un espacio normado E en el espacio $V_p[a,b]$ de las funciones de p-variación acotada en $[a,b]$.

Teorema 1 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow E^*$ tal que $f \in VAF_p^{E^*}[a,b]$ y sea E un espacio normado. Entonces las aplicación $U : x \longmapsto f(t)(x)$ es un operador lineal continuo que aplica al espacio E en el espacio $V_p[a,b]$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $f \in VAF_p^{E^*}[a,b]$, entonces (ver proposición 1) la función $t \longmapsto f(t)(x)$ es de variación acotada para cada $x \in E$, es decir, U aplica al espacio E en $V_p[a,b]$. La linealidad de U es evidente y su continuidad se deduce de la proposición 8. ∎

Teorema 2 *Para cada operador lineal continuo $U : E \longrightarrow V_p[a,b]$ existe una función abstracta $f \in VAF_p^{E^*}[a,b]$, tal que U puede ser representado en la forma $U : x \longmapsto f(t)(x)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $U : E \longrightarrow V_p[a,b]$ lineal y continuo, tal que $U : x \longmapsto \varphi$ y sea t fijo. Entonces la aplicación $F_t : x \longmapsto U(t)(x)$ es evidentemente una funcional lineal sobre E, la cual es continua por ser composición de aplicaciones continuas, o sea, $F_t \in E^*$ para cada $t \in [a,b]$ y $\varphi : t \longmapsto F_t$ para cada $x \in E$. Como $\varphi \in V_p[a,b]$, si se define $f : t \longmapsto F_t$, entonces f es una función abstracta de p-variación acotada débil en $[a,b]$ y, por la forma en que se ha construido f, resulta que el operador U se puede escribir en la forma $U(x) = \varphi(t) = f(t)(x)$. ∎

3 Integrales abstractas de Stieltjes

En este trabajo se pretende, de manera análoga al Teorema de Representación de Riesz, utilizar un concepto similar al de la integral de Stieltjes para intentar obtener una representación de los operadores que aplican al espacio de las funciones absolutamente p-continuas ($C_p[a,b]$) en un espacio normado débilmente completo.

Definición 4 *Sean $X : [a,b] \to E$ y $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se dice que la* **integral abstracta de Stieltjes** $\int_a^b \varphi(t)dX(t)$ *existe si y sólo si existe un $\xi \in E^{**}$, tal que*

$$\xi f = \int_a^b \varphi(t)dfX(t),\ \forall f \in E^*, \quad \text{y su valor será} \quad \int_a^b \varphi(t)dX(t) = \xi.$$

La integral abstracta de Stieltjes cumple las siguientes propiedades de fácil demostración (ver [4]).

Proposición 10 *Si* $\varphi \in C[a,b]$ *y* $X \in VAF_1^E[a,b]$*, entonces existe la integral abstracta* $\int_a^b \varphi(t)dX(t)$*.*

Proposición 11 *Sean* E *un espacio normado débilmente completo,* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $X \in VAF_p^E[a,b]$*. Si existe la integral abstracta* $\int_a^b \varphi(t)dX(t)$*, entonces ella se puede interpretar como un elemento de* E *a través de la inmersión canónica.*

Proposición 12 *Sean* $X, Y \in VAF_p^E[a,b]$ *y* $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que existen las integrales abstractas* $\int_a^b \varphi(t)dX(t)$ *y* $\int_a^b \varphi(t)dY(t)$*. Si además* $Z(t) = X(t) + Y(t) \quad \forall t \in [a,b]$*, entonces existe también la integral* $\int_a^b \varphi(t)dZ(t)$ *y se cumple que*

$$\int_a^b \varphi(t)dZ(t) \quad = \quad \int_a^b \varphi(t)dX(t) + \int_a^b \varphi(t)dY(t).$$

Proposición 13 *Si* $X \in VAF_q^E[a,b]$ *es diferente del elemento cero en una cantidad numerable de puntos y existe* $\int_a^b \varphi(t)dX(t)$ *para* $\varphi \in C_p[a,b]$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, entonces*

$$\int_a^b \varphi(t)dX(t) = 0.$$

Proposición 14 *Sean* $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *(*$k = 1, \ldots, n$*) y* $X : [a,b] \longrightarrow E$*, tal que existen las integrales abstractas* $\int_a^b \varphi_k(t)dX(t)$*. Entonces existe la integral* $\int_a^b \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t)dX(t)$*,* $\alpha_k \in \mathbb{R}$*, y se cumple*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t)dX(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b \varphi_k(t)dX(t).$$

4 Sobre la representación de los operadores lineales continuos de $C_p[a,b]$ en un espacio normado débilmente completo

Sean las funciones escalonadas $\chi_t(s)$, definidas sobre el intervalo $[a,b]$ tales que $\chi_t(a) = 0$, $\chi_t(s) = 1$ para $a < s \leq t$ y $\chi_t(s) = 0$ para $t < s \leq b$ y denotemos por

$$EI[a,b] \quad = \quad \left\{ \omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ \omega(s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{\tau_k}(s), \alpha_k \in \mathbb{R},\ \tau_k \in (a,b) \right\}$$

al espacio de las funciones escalonadas continuas por la izquierda en $[a,b]$. Entonces se cumple:

Lema 1 *Sea $U : C_p[a,b] \longrightarrow E$ un operador lineal y continuo $(1 < p < \infty)$, siendo E un espacio normado débilmente completo. Entonces existe un operador lineal y continuo $\widetilde{U}$, definido sobre $C_p[a,b] \cup EI[a,b]$, tal que*

$$\widetilde{U}(\varphi) \quad = \quad U(\varphi)\ \forall\varphi \in C_p[a,b]\ \text{ y }\ \left\|\widetilde{U}\right\| = \|U\|\,.$$

Demostración: Sea $X \in EI[a,b]$ con saltos en los puntos t_k $(k = 0,\ldots,m)$. Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{1\le k\le m}(t_k - t_{k-1}) > \frac{2}{r}.$$

Construyamos una sucesión de funciones (X_n) de manera que para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es la función continua que resulta de tomar en la función X cada punto de salto t_k y unirlo por una línea recta con el punto de abscisa $t_k - \frac{1}{n}$ (el punto $(a,0)$ se une por una recta al punto de abscisa $a - \frac{1}{n}$).

Como se conoce que las funciones lineales son absolutamente p-continuas en $[a,b]$ (ver [5]) y las funciones X_n son sumas finitas de funciones lineales, entonces $X_n \in C_p[a,b]$.

Resulta sencillo verificar (considerando la norma del supremo) que

$$\|X_n\|_\infty \longrightarrow \|X\|_\infty \text{ y } X_n(t) \longrightarrow X(t), \forall t \in [a,b].$$

Por otra parte, como U es lineal continuo, la sucesión $Y_n = U(X_n)$ converge débilmente. Sea Y su límite débil. Como E es débilmente completo, resulta que $Y \in E$.

Sea $\widetilde{U} : C_p[a,b] \cup EI[a,b] \longrightarrow E$ tal que

$$\widetilde{U}(\varphi) = U(\varphi), \forall\varphi \in C_p[a,b] \text{ y } \widetilde{U}(X) = U(Y)\forall X \in EI[a,b].$$

La linealidad de $\widetilde{U}$ es evidente. Demostremos la relación $\left\|\widetilde{U}\right\| = \|U\|$:

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{U}(x)\right\| &= \|Y\| = \|\lim deb U(X_n)\| \le \limsup \|U(X_n)\| \\ &\le \|U\| \limsup \|X_n\| = \|U\|\,\|X\|\,.\end{aligned}$$

O sea, $\left\|\widetilde{U}\right\| \le \|U\|$, de donde se deriva la continuidad de $\widetilde{U}$.

Por otro lado, como $\left\|\widetilde{U}\right\| = \sup\limits_{X\neq 0}\left\|\widetilde{U}(X)\right\|$, por la forma de construir $\widetilde{U}$, es $\left\|\widetilde{U}\right\| \ge \|U\|$, siendo entonces $\left\|\widetilde{U}\right\| = \|U\|$. ∎

Los teoremas siguientes tratan sobre una representación de los operadores lineales continuos de $C_p[a,b]$ en un espacio normado débilmente completo:

Teorema 3 *Sea E un espacio normado débilmente completo. Entonces para cada operador lineal y continuo $U : C_p[a,b] \longrightarrow E$ existe una función abstracta $Y \in VAF_q^E[a,b]$, tal que*

$$U(\theta) = \int_a^b \theta(t)dY(t)\,\forall\theta \in C_p[a,b] \text{ y } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea la función escalonada continua a la izquierda

$$\chi_t(s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a < s \leq t \\ 0 & \text{si} \quad t < s \leq b \ \text{ ó } \ s = a. \end{cases}$$

Por el lema 1 se puede extender el campo de definición del operador U a $C_p[a,b] \cup EI[a,b]$ conservando la norma. Para simplificar la notación en lo adelante se denotará también por U al operador extendido. Ahora, se puede definir una función abstracta $Y : [a,b] \longrightarrow E$ mediante el operador U en la forma $Y(t) = U(\chi_t)$, donde $U(\chi_t) \in E$ para cada t fijo.

(i) Demostremos que $Y \in VAF_q^E[a,b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Sea $\pi : a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \|Y(t_i) - Y(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \left\|U(\chi_{t_i}) - U(\chi_{t_{i-1}})\right\| = \sum_{i=1}^{n} \left\|U(\chi_{t_i} - \chi_{t_{i-1}})\right\|. \tag{2}$$

Como en el lema 1, consideremos $\chi_{t_i}^{(n)} \in C_p[a,b]$ tal que $\lim deb \chi_{t_i}^{(n)} = \chi_{t_i}$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left\|U(\lim \mathrm{deb}(\chi_{t_i}^{(n)} - \chi_{t_{i-1}}^{(n)}))\right\| &\leq \sum_{i=1}^{n} \limsup \left\|U(\chi_{t_i}^{(n)} - \chi_{t_{i-1}}^{(n)})\right\| \\ &= \limsup \sum_{i=1}^{n} \left\|U(\chi_{t_i}^{(n)} - \chi_{t_{i-1}}^{(n)})\right\|. \end{aligned}$$

Como U es lineal y continuo, la aplicación $F : \varphi \longrightarrow \|U(\varphi)\|$ es una funcional lineal continua sobre $C_p[a,b]$. Por el teorema de representación para este tipo de funcionales (ver [5]) existe una función g de q-variación acotada en $[a,b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que

$$F(f) = \int_a^b f(t)dg(t) \quad \forall f \in C_p[a,b] \text{ y } V_p(g) \leq 2^{1+\frac{1}{p}} \|F\|. \tag{3}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \limsup \sum_{i=1}^{n} \left\|U(\chi_{t_i}^{(n)} - \chi_{t_{i-1}}^{(n)})\right\| &= \limsup \sum_{i=1}^{n} F(\chi_{t_i}^{(n)} - \chi_{t_{i-1}}^{(n)}) \\ &= \limsup \sum_{i=1}^{n} \int_a^b (\chi_{t_i}^{(n)} - \chi_{t_{i-1}}^{(n)})(t)dg(t) \\ &= \limsup \int_a^b \sum_{i=1}^{n} (\chi_{t_i}^{(n)} - \chi_{t_{i-1}}^{(n)})(t)dg(t) \\ &\leq \limsup \int_a^b dg(t) \leq \limsup V_p(g) \leq 2^{1+\frac{1}{p}} \|F\|. \end{aligned}$$

Luego, $Y \in VAF_q^E[a,b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y se cumple $\|Y\|_{VAF_q^E} \leq 2^{1+\frac{1}{p}} \|F\|$.

ii) Supongamos que existen las integrales abstractas de Stieltjes

$$\int_a^b \chi_t(s)dY(s) = \xi^{(t)} \in E^{**}$$

para todo $t \in [a,b]$. Como E es débilmente completo, se cumple que $\xi^{(t)} \in E$ para cada $t \in [a,b]$. Demostremos que para todo punto t de continuidad débil por la izquierda de la función Y se cumple

$$U(\chi_t) = \int_a^b \chi_t(s)dY(s).$$

Sea $f \in E^*$ y $\int_a^b \chi_{t_0}(s)dfY(s) = \int_a^{t_0} dY(s)$. Para calcular la integral de la derecha, definimos

$$Z : s \longmapsto fY(s) \text{ y } \varphi(s) = (V_p(Z;a,s))^p - Z(s)$$

Aplicando las propiedades de la integral abstracta de Stieltjes se tiene

$$\int_a^{t_0} dY(s) = \int_a^{t_0} d\left((V_p(Z;a,s))^p - \varphi(s)\right) = \int_a^{t_0} d(V_p(Z;a,s)^p) - \int_a^{t_0} d\varphi(s).$$

Las integrales de la derecha son las integrales de Lebesgue-Stieltjes de la función $\omega(t) \equiv 1$ respecto a las medidas de Stieltjes generadas por las funciones monótonas $V_p(Z;a,s)$ y $\varphi(s)$ respectivamente. Luego

$$\int_a^{t_0} dY(s) = (V_p(Z;a,t_0-0))^p - \varphi(t_0-0) = Z(t_0-0) = fY(t_0-0).$$

Entonces, si t_0 es un punto de continuidad débil por la izquierda de la función abstracta Y, se cumple $fY(t_0-0) = fY(t_0)$ para toda $f \in E^*$, de donde

$$\xi^{(t_0)}f = \int_a^b \chi_{t_0}(s)dfY(s) = fY(t_0), \forall f \in E^*.$$

Si J es la inmersión canónica de E en su bidual, se tiene $\xi^{(t_0)} = J(Y(t_0))$, por lo que convendremos en escribir $\xi^{(t_0)} = Y(t_0)$, es decir,

$$\int_a^b \chi_{t_0}(s)dfY(s) = Y(t_0) = U(\chi_{t_0}).$$

Por otra parte, si t_0 es un punto de discontinuidad débil por la izquierda de la función abstracta Y, existe una sucesión (t_n) con $t_n < t_0$ y $|t_n - t_0| \longrightarrow 0$, tal que $Y(t_n)$ no converge débilmente a $Y(t_0)$ y, por tanto, existe $f \in E^*$, tal que

$$\int_a^b \chi_{t_0}(s)dfY(s) \neq fY(t_0) = Y(t_0) = U(\chi_{t_0}).$$

Ahora, si P es el conjunto de los puntos de discontinuidad débil por la izquierda de Y, entonces P es a lo sumo numerable. Demostremos que para toda función φ escalonada y continua por la izquierda con puntos de saltos no pertenecientes a P se cumple

$$U(\varphi) = \int_a^b \varphi(s)dY(s).$$

Sea para ello

$$\varphi(s)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\tau_k}(s) \text{ con } \tau_k\in P \quad (k=1,\ldots,n),$$

y sean

$$\int_a^b \chi_{\tau_k}(s)dY(s)=\xi^{(\tau_k)} \text{ y } \int_a^b\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\tau_k}(s)dY(s)=\xi.$$

Como $\tau_k\notin P$ y por la linealidad de U (aplicando las propiedades de la integral abstracta de Stieltjes) se obtiene entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b\varphi(s)dY(s) &= \int_a^b\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\tau_k}(s)dY(s)=\xi=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi^{(\tau_k)}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_a^b\chi_{\tau_k}(s)dY(s)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kU(\chi_{\tau_k})\\ &= U(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\tau_k})=U(\varphi).\end{aligned}$$

Sea ahora $\theta\in C_p[a,b]$, entonces para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$, tal que para el módulo de p-continuidad absoluta de θ se cumple

$$\omega_p(\delta)(\theta)=\sup_{\pi_\delta}\left(\sum_{i=1}^{n}|\theta(t_i)-\theta(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

para cada partición π_δ de $[a,b]$ de norma menor que δ. Escojamos una de esas particiones de modo que $t_i\notin P$ para $i=1,\ldots,n$, lo cual es posible por ser P numerable, y denotémosla por π. Para esa partición se contruye la función escalonada $\widehat{\theta}$ tal que

$$\widehat{\theta}(s)=\sum_{i=1}^{n}\theta(\eta_k)(\chi_{t_{k+1}}(s)-\chi_{t_k}(s)) \text{ con } \eta_k\in(t_k,t_{k+1}) \text{ arbitrario.}$$

Calculemos una cota superior para la suma

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left|(\theta-\widehat{\theta})(x_i)-(\theta-\widehat{\theta})(x_{i-1})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $\pi_\delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ es una partición del intervalo $[a,b]$.

Al dividir esa suma en dos, de manera que la primera suma se realice sobre todos los subintervalos de π_δ totalmente contenidos en algún subintervalo de la partición π y la segunda suma se desarrolle sobre los restantes subintervalos de π_δ y, haciendo uso de la desigualdad de Minkowski, se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left|(\theta-\widehat{\theta})(x_i)-(\theta-\widehat{\theta})(x_{i-1})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<2\varepsilon,$$

de manera que se cumple $\left\|\theta - \widehat{\theta}\right\|_{V_p} < 3\varepsilon$ y de ello se deduce la existencia de $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b (\theta - \widehat{\theta})(s)dY(s) = 3k\varepsilon.$$

Igualmente resulta sencillo acotar (ver [4])

$$\left\| U(\theta) - \int_a^b \theta(s)dY(s) \right\| \leq 3\varepsilon(\|U\| + k).$$

De ello se deduce finalmente el teorema a través de la representación

$$U(\theta) = \int_a^b \theta(s)dY(s). \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema brinda una condición suficiente respecto a la representación que se pretende conseguir.

Teorema 4 *Sean E un espacio normado débilmente completo, $1 < p < \infty$ y $q < p'$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces para cada función abstracta $X \in VAF_q^E[a,b]$ la aplicación U definida por*

$$U(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dX(t), \forall \varphi \in C_p[a,b].$$

es un operador lineal continuo de $C_p[a,b]$ en E.

DEMOSTRACIÓN: Si $X \in VAF_q^E[a,b] \subset VAD_q^E[a,b]$, entonces para $f \in E^*$ la aplicación compuesta fX es de q-variación acotada en $[a,b]$, y por el teorema de representación para este tipo de funcionales (ver [5]), para cada $\varphi \in C_p[a,b]$ existe la integral de Stieltjes $\int_a^b \varphi(t)dfX(t)$ y se cumple

$$\left| \int_a^b \varphi(t)dfX(t) \right| \leq \left\{ 1 + \varsigma(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) \right\} V_p(\varphi)V_q(fX),$$

donde ς denota a la conocida función Zeta de Riemann.

Definiendo ahora la funcional $\xi : f \longmapsto \int_a^b \varphi(t)dfX(t), \forall f \in E^*$, se deduce la existencia de la integral abstracta $\int_a^b \varphi(t)dX(t)$ y por la tanto la linealidad y acotación del operador $U : C_p[a,b] \longrightarrow E$, tal que

$$U(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dX(t). \quad \blacksquare$$

Como se puede observar, de los dos últimos teoremas se deduce para un espacio normado débilmente completo E y todo $1 < p < \infty$ la relación

$$VAF_q^E[a,b] \subset B(C_p[a,b], E) \subset VAF_q^E[a,b](q < p', \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1).$$

Sin embargo, en general no se puede afirmar $VAF_{p'}^E[a,b] \subset B(C_p[a,b], E)$. Para comprobarlo basta considerar el caso particular $E = \mathbb{R}$. En efecto del hecho de que $V_p[a,b]$ contiene un subespacio isomorfo a c_0 se deduce que cada predual suyo contiene una copia isomorfa de l_1, lo cual no sucede con $C_p[a,b]$ (ver [2]), por lo que $V_{p'}[a,b]$ no puede ser su dual.

5 Conclusiones

En este trabajo se ha obtenido una representación de los operadores lineales y continuos de un espacio normado en el espacio de las funciones de p-variación acotada sobre un intervalo como funciones abstractas de $VAF_p^{E^*}[a,b]$. Igualmente se obtiene un teorema análogo al de Representación de Riesz, planteando una representación de los operadores lineales y continuos del espacio de las funciones absolutamente p-continuas sobre un intervalo en un espacio normado débilmente completo a través de la integral abstracta de Stieltjes respecto a funciones abstractas de q-variación acotada (con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, la cual no resulta ser una isometría.

Referencias

[1] Gelfand, I.M. (1987) "Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren", en *Collected Papers I*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York: 113–162.

[2] Kisliakov, S.V. (1984) "A Remark on the space of functions of bounded p-variation", *Mathematische Nachrichten* **119**: 137–140.

[3] Love, E.R.; Young, L.C. (1937) "Sur une classe de fonctionelles lineaires", *Fundamenta Mathematica* **28**: 110–118.

[4] Puig de Dios, Y. (2005) *Espacios de Funciones Abstractas de p-Variación Acotada Fuerte y Débil.* Tesis de Licenciatura, Universidad de La Habana, Cuba.

[5] Roldán Inguanzo, R. (1989) *Raüme von Folgen und Funktionen von beschränkter p-Variation.* Tesis de Doctorado, Friedrich Schiller Universität de Jena, Alemania.