© Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2019 **26**(1) : 45–81
cimpa – ucr issn: 1409-2433 (Print), 2215-3373 (Online)
doi: https://doi.org/10.15517/rmta.v26i1.35518

ESTIMACIÓN DE MODELOS DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA VÍA FILTRO AUXILIAR DE PARTÍCULAS

ESTIMATION OF STOCHASTIC VOLATILITY MODELS VIA AUXILIARY PARTICLES FILTER

Yeniree Trosel[*] Aracelis Hernández[†]
Saba Infante[‡]

Received: 24/Jan/2018; Revised: 20/Sep/2018; Accepted: 24/Sep/2018

[*]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela. E-Mail: yenireetrosel@gmail.com

[†]Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales, Universidad de Investigación de Tecnología Experimental Yachay Tech, Ecuador, & misma dirección que/*same address as*: Y. Trosel in Venezuela. E-Mail: ahernandeze@yachaytech.edu.ec; arhernan@uc.edu.ve

[‡]Misma dirección que/*Same address as*: A. Hernández. E-Mail: sinfante@yachaytech.edu.ec; sinfante@uc.edu.ve

Resumen

El creciente interés en el estudio de la volatilidad para series de instrumentos financieros nos lleva a plantear una metodología basada en la versatilidad de los métodos Monte Carlo Secuencial (MCS) para la estimación de los estados del modelo de volatilidad estocástica general (MVEG). En este trabajo se propone una metodología basada en la estructura espacio estado aplicando técnicas de filtrado como es el caso del filtro auxiliar de partículas para la estimación de la volatilidad subyacente del sistema. Adicionalmente, se propone utilizar un algoritmo Monte Carlo por cadenas de Markov (MCMC), como es el muestreador de Gibbs para la estimación de los parámetros. La metodología es ilustrada usando una serie de retornos de datos simulados, y la serie de retornos correspondiente al índice de precio Standard and Poor's 500 (S&P 500) para el periodo $1995-2003$. Los resultados evidencian que la metodología propuesta permite explicar adecuadamente la dinámica de la volatilidad cuando existe una respuesta asimétrica de esta ante un shock de diferente signo, concluyendo que los cambios bruscos en los retornos corresponden a valores altos en la volatilidad.

Palabras clave: modelos de volatilidad estocástica; modelos espacio estado; filtro auxiliar de partículas.

Abstract

The growing interest in the study of volatility for series of financial instruments leads us to propose a methodology based on the versatility of the Sequential Monte Carlo (SMC) methods for the estimation of the states of the general stochastic volatility model (GSVM). In this paper, we proposed a methodology based on the state space structure applying filtering techniques such as the auxiliary particles filter for estimating the underlying volatility of the system. Additionally, we proposed to use a Markov chain Monte Carlo (MCMC) algorithm, such as is the Gibbs sampler for the estimation of the parameters. The methodology is illustrated through a series of returns of simulated data, and the series of returns corresponding to the Standard and Poor's 500 price index (S&P 500) for the period $1995 - 2003$. The results show that the proposed methodology allows to adequately explain the dynamics of volatility when there is an asymmetric response of this to a shock of a different sign, concluding that abrupt changes in returns correspond to high values in volatility.

Keywords: stochastic volatility models; space state models; auxiliary particles filter.

Mathematics Subject Classification: 62LXX.

1 Introducción

En finanzas, el término volatilidad se refiere a la desviación estándar de los retornos continuos de un instrumento financiero, y representa el riesgo que involucra dicho instrumento. El paradigma central en las finanzas consiste en asumir ciertos riesgos para obtener beneficios, y por lo tanto se busca minimizar los riesgos de las posibles pérdidas y al mismo tiempo maximizar los rendimientos esperados.

La volatilidad de un período futuro representa una medida del riesgo a considerar, por lo que es necesario no sólo una medida de la volatilidad actual, sino también una predicción de la volatilidad a futuro. Como la volatilidad varía en el tiempo, los modelos clásicos de series de tiempo no son adecuados porque parten del hecho que la varianza es constante, y en las series financieras es característico encontrar períodos de alta volatilidad seguidos de períodos de baja volatilidad.

En este sentido, ha habido un incremento en el modelaje de la evolución dinámica de la volatilidad y una de estas tendencias lo constituyen los modelos de volatidad estocástica (MVE) en donde la volatilidad se modela como una variable latente no observada. El interés por estos modelos comienza con el trabajo de Clark [4] quien propuso un modelo de mezcla para la distribución de los cambios en el stock de precios. De acuerdo con [11], los MVE tienen sus raíces tanto en las matemáticas financieras como en la econometría, y es así como los distintos MVE se originan de temas muy diferentes. Así, en [1] se asume volatilidad constante para las opciones de precio pero los estudios empíricos demostraron que esta suposición no era realista. Esto motivó a Hull y White [15] a introducir un modelo para las opciones de precio con volatilidad estocástica, lo que contribuyó al desarrollo del concepto de volatilidad latente ya introducido por [19]. En [26, 10] notaron que un MVE con varianza condicional autocorrelacionada que varía en el tiempo, era más apropiado para las series de cambios de precios.

La característica principal de los MVE es que la volatilidad se modela como una variable latente no observada, este procedimiento permite capturar de una manera más apropiada las principales propiedades empíricas observadas en las series diarias de retornos financieros como son la aleatoriedad y la persistencia [2, 25]. Sin embargo, la estimación de los MVE resulta complicada porque no se puede construir de forma exacta la función de verosimilitud que depende de integrales múltiples de alta dimensión [28]. En las últimas décadas, se han desarrollado diferentes métodos para estimar los parámetros de los modelos de volatilidad estocástica, entre los cuales se destacan el método de quasi máxima verosimilitud [13], en donde una ecuación de obsevación no lineal se transforma en un modelo lineal al considerar los cuadrados de las observaciones y luego tomando el logaritmo de estos. En [13] se aproxima la distribución de los ruidos de las observaciones por una distribución normal y usa el filtro de Kalman para calcular la quasi-verosimilitud. Además, [5, 6] aproximan la verosimilitud usando integración de Monte Carlo y proponen un método eficiente llamado muestreador de importancia acelerado Gaussiano. La estimación Bayesiana vía algoritmos de Monte Carlo por Cadenas de Markov (MCMC) ha sido ampliamente usada en los MVE desde los años noventa. En [17] se adoptó el esquema del muestreador de Gibbs, y [24] emplearon el algoritmo de Metropolis-Hasting. [18, 3, 22], reformularon los MVE aproximando la distribución $\log(\chi^2)$ con una mezcla de distribuciones normales; mientras que [29] implementó la estimación de los MVE usando el software WinBUGS.

Por otra parte, los métodos MCS también se han usado ampliamente para la estimación de los parámetros en los modelos de volatilidad dinámicos. Los métodos MCS son una familia de metodologías que se usan para la simulación de Monte Carlo en sistemas dinámicos estocásticos, comprende técnicas simples y flexibles que permiten la tarea de estimar y optimizar generando recursivamente muestras de las variables estado o de alguna otra variable latente del sistema [21, 8, 20, 7]. Estos métodos tienen la habilidad de adaptarse a diferentes modelos dinámicos que pueden tener los estados no observados, como por ejemplo ser no lineales y/o no Gaussianos. Son métodos muy flexibles, fáciles de implementar que se pueden paralelizar. En los sistemas financieros, los métodos MCS han captado la atención por la capacidad de estimar variables de sistemas que incluyen ruidos multiplicativos, e incluso difusiones de salto.

En este artículo, se propone implementar una metodología bajo el paradigma Bayesiano para estimar el modelo de volatilidad estocástica general (MVEG), basada en la estructura espacio-estado que permite modelar la dinámica de la volatilidad presente de una manera latente en los retornos de instrumentos financieros. La metodología que se propone y que es el aporte principal de esta investigación, combina los métodos MCS a través de técnicas de filtrado basadas en el filtro auxiliar de partículas que permite la estimación de la volatilidad subyacente, en conjunto con el algoritmo muestreador de Gibbs como método MCMC, para la estimación de los parámetros del modelo propuesto. Esta metodología es ilustrada haciendo uso de los retornos de una serie financiera simulada, así como también se presenta una aplicación de esta metodología propuesta en la serie de retornos correspondiente el índice de precio Standard and Poor's 500 (S&P 500) para el período $1995-2003$.

El resto de este artículo se organiza como sigue: en la sección 2 se define el modelo de volatilidad estocástica general (MVEG), en la sección 3 se plantea el algoritmo de filtro auxiliar de partículas (FAP) para la estimación del MVEG, en la sección 4 se desarrolla el algoritmo Gibbs para la estimación de los parámetros, en la sección 5 se muestran los resultados y en la sección 6 se establece la discusión, conclusiones y recomendaciones.

2 Modelo de volatilidad estocástica general (MVEG)

El modelo de volatilidad estocástica general (MVEG) descrito por [27] se puede escribir como:

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \exp(h_t/2) && (1)\\ h_t &= \mu(1-\phi) + \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t && (2)\\ h_0 &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right) && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N(0,\Sigma) \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

La variable y_t representa los retornos observados en el tiempo t, el proceso $\{h_t\}$ corresponde a la log-volatilidades no observadas, μ es la tendencia en la ecuación de estado, σ_η es la volatilidad de la log-volatilidad y ϕ es el parámetro de persistencia o error.

Sea $\theta = \left(\mu, \phi, \sigma_\eta^2\right)$, el vector de parámetros desconocidos con las restricciones: $0 \leq \phi < 1$ y $\sigma_\eta^2 > 0$, además se considera que $h_0 \sim N(\mu, \sigma_\eta^2/(1-\phi^2))$. La log-volatilidad h_t se considera un proceso estacionario AR(1) con un parámetro de persistencia ϕ que cumple la condición $|\phi| < 1$. Los errores ε_t capturan los errores de medición y muestreo, mientras que los errores η_t evalúan la variación de la dinámica que sigue la volatilidad subyacente del sistema.

Luego, al calcular la esperanza y varianza de la ecuación de observación, se obtiene que $E[y_t|h_t] = 0$ y $Var[y_t|h_t] = \exp(h_t)$, pero si $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, entonces:

$$y_t|h_t \sim N(0, \exp(h_t)). \tag{5}$$

En consecuencia, al calcular la esperanza y varianza de la ecuación de observación se obtiene, $E[h_t|h_{t-1},\theta] = \mu\,(1-\phi) + \phi\, h_{t-1}$ y $Var[h_t|h_{t-1},\theta] = \sigma_\eta^2$, pero si $\eta_t \sim N(0,1)$, entonces:

$$h_t|h_{t-1},\theta \sim N(\mu\,(1-\phi) + \phi\, h_{t-1}, \sigma_\eta^2). \tag{6}$$

Reescribiendo de manera jerárquica la ecuación de observación (1) y la ecuación de estado (2), se obtiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned} y_t|h_t &\sim N(0, \exp(h_t)) \\ h_t|h_{t-1},\theta &\sim N(\mu\,(1-\phi) + \phi\, h_{t-1}, \sigma_\eta^2) \\ h_0 &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Así el modelo MVEG en (7) pertenece a una clase general de modelos llamados modelos paramétricos dinámicos de variable latente. El uso de estos modelos se ha vuelto popular por la flexibilidad que ellos ofrecen para modelar fenómenos complejos como los que se presentan en la dinámica financiera. Sin embargo, estos modelos conducen a estructuras no lineales tanto en la ecuación de observación como en la ecuación de estado, además, los errores de medición en la ecuación de observación y/o los errores de la ecuación de estado pueden tener comportamientos Gaussianos y/o no Gaussianos. Sin embargo, la estimación de los parámetros del MVEG (7) no es fácil porque el proceso de retornos dependen de la consideración de un modelo autoregresivo de volatilidad estocástica, lo que impide construir la función de verosimilitud de forma exacta. En vista de estas dificultades, la estimación del modelo en (7) se hará bajo el paradigma Bayesiano usando la metodología que se propone en este artículo que hace uso de una combinación de los métodos Monte Carlo secuencial (MCS) con Monte Carlo por cadenas de Markov (MCMC), en particular se propone utilizar el filtro auxiliar de partículas como MCS en conjunto con el algoritmo muestreador de Gibbs como método MCMC.

3 Filtro auxiliar de partículas

En los últimos 20 años se han desarrollado algoritmos de simulación para explorar la distribución a posteriori de los modelos Bayesianos jerárquicos. En particular, los algoritmos de Monte Carlo por Cadenas de Markov (MCMC) han resultado muy populares para aproximar integrales y densidades de probabilidad.

Sin embargo, estos algoritmos son incapaces de manejar parámetros que evolucionan en el tiempo porque asumen que estos son fijos y en consecuencia las densidades son invariantes en el tiempo. En muchas aplicaciones se necesita muestrear a partir de una secuencia de distribuciones que cambian con el tiempo. Así por ejemplo, las observaciones se pueden registrar secuencialmente en el tiempo con el interés de ejecutar la inferencia Bayesiana en tiempo real de manera que se pueda actualizar y predecir la distribución a posteriori cada vez que se disponga de un nuevo dato en el tiempo.

En este sentido, los métodos de Monte Carlo Secuencial (MCS) [8] constituyen una familia de algoritmos, los cuales propagan recursivamente un conjunto de muestras aleatorias con pesos asociados llamadas partículas. Estos métodos son conocidos como filtros de partículas [12], y proporcionan una solución suboptimal pero factible al problema de filtraje Bayesiano. La meta de estos métodos es estimar la distribución de filtrado de los estados latentes y poder estimar la evolución de un vector de estados en cada instante de tiempo, basándose en cierta información. En consecuencia, la densidad de probabilidad a posteriori se aproxima a partir de un conjunto discreto de muestras o partículas, cada una con un peso asociado, lo que permite convertir integrales intratables en sumatorias calculables de manera más sencilla. A medida que se aumenta el número de partículas empleado, mejor es la aproximación llevada a cabo y, por lo tanto, se asemeja más a la función continua descrita por la función de probabilidad a posteriori.

La idea es aproximar las densidades a posteriori o densidad filtrada como sigue:

$$p(x_t \,|\, y_t) \propto p(y_t \,|\, x_t) p(x_t), \tag{8}$$

en cada tiempo t por una muestra aleatoria de partículas x_t^i, con $i = 1, \dots, I$ con los correspondientes pesos π_t^i. Luego, la posterior (8) se estima empíricamente por:

$$p(x_t \,|\, y_t) = \sum_{i=1}^{I} \pi_t^i \, \delta(x_t - x_t^i), \tag{9}$$

donde $\delta(x_t - x_t^i)$ es la función delta de Dirac centrada en la partícula x_t^i. Usando (9), la integral para calcular la priori se reemplaza por sumas:

$$p(x_{t+1}) = \int p(x_{t+1} \,|\, x_t)\, p(x_t \,|\, y_t)\, dx_t \approx \sum_{i=1}^{I} \pi_t^i \, p(x_{t+1} \,|\, x_t^i). \tag{10}$$

Así que la distribución a posteriori filtrada se puede aproximar como:

$$p(x_{t+1} \mid y_{t+1}) \propto p(y_{t+1} \mid x_{t+1}) \sum_{i=1}^{I} \pi_t^i \, p(x_{t+1} \mid x_t^i). \tag{11}$$

Asumiendo que se tiene un conjunto de partículas que aproxima lo suficientemente bien en el tiempo t a la densidad a posteriori $p(x_t \mid y_t)$, entonces el problema es como muestrear un conjunto de partículas a partir de la nueva densidad a posteriori $p(x_{t+1} \mid y_{t+1})$ en (11). La estimación eficiente a partir de la densidad a posteriori es el tema central de la mayoría de los métodos en la literatura de filtros de partículas [8].

Una observación importante sobre la funcionalidad de los filtros es que la priori en (10) se puede considerar como una mezcla de densidades a partir de la cual es fácil muestrear: se selecciona la i-ésima componente de la mezcla $p(x_{t+1} \mid x_t^i)$ con probabilidad π_t^i. En este sentido, el filtro SIR (Sampling/Importance Resampling) [12, 16] involucra primero muestrar a partir de la priori (10) y luego asignar a cada partícula j muestreada un peso π_{t+1}^j proporcional a la verosimilitud $p(y_{t+1} \mid x_{t+1}^j)$, y finalmente remuestrear para que todas las partículas pesen igual.

El principal problema con los filtros SIR es que requieren muchas partículas para asegurar la convergencia cuando la verosimilitud $p(y \mid x)$ es muy puntiaguda o está localizada en una de las colas de la priori [23], y este último caso es mucho más problemático en caso de valores extremos. Otro problema importante en la práctica es que el modelo $p(y_t \mid x_t)$ de las observaciones puede involucrar un vector x_t con dimensión alta.

Una solución al problema de muestrear de manera óptima a partir de la densidad a posteriori, fue propuesta en [23] bajo el nombre de filtro auxiliar de partículas (FAP) que ofrece una solución intuitiva al problema de remuestreo de partículas basada en su verosimilitud predictiva y explicando las nuevas observaciones antes que se propaguen [9]. El algoritmo para el FAP se reduce a muestrear a partir de la posterior $p(x_{t+1} \mid y_{t+1})$ en (11) insertando la verosimilitud dentro de esta mezcla:

$$p(x_{t+1} \mid y_{t+1}) \propto \sum_{i=1}^{I} \pi_t^i \, p(y_{t+1} \mid x_{t+1}) \, p(x_{t+1} \mid x_t^i), \tag{12}$$

y tratar los productos $\pi_t^i \, p(y_{t+1} \mid x_{t+1})$ como componentes de probabilidad para muestrear a partir de la respectiva mezcla.

Como la verosimilitud $p(y_{t+1}\,|\,x_{t+1})$ en este producto involucra al vector de estado x_{t+1} no observado, entonces en [23] sugieren una aproximación a (12) como:

$$\hat{p}(x_{t+1}\,|\,y_{t+1}) \propto \sum_{i=1}^{I} \pi_t^i\, p(y_{t+1}\,|\,\mu_{t+1}^i)\, p(x_{t+1}\,|\,x_t^i), \tag{13}$$

donde μ_{t+1}^i es el valor más probable asociado con la i-ésima componente de la densidad de transición $p(x_{t+1}\,|\,x_t^i)$, por ejemplo la media. Después de haber muestreado un conjunto de $J = 1, \ldots, I$ partículas x_{t+1}^j a partir de la mezcla en (13), entonces sus pesos son proporcionales a:

$$\pi_{t+1}^i \propto \frac{p(y_{t+1}\,|\,x_{t+1}^j)}{p(y_{t+1}\,|\,\mu_{t+1}^{i_j})}, \tag{14}$$

donde $\mu_{t+1}^{i_j}$ es el valor más probable asociado al componente $p(x_{t+1}\,|\,x_t^{i_j})$ en la mezcla en (13), a partir del cual se ha muestreado la partícula j. Al calcular las partículas como en (14) se tiene el beneficio de crear partículas con pesos mucho menos variables que con el filtro SIR, lo cual es un punto muy importante especialmente en el caso de valores extremos [23].

El FAP se puede considerar un procedimiento donde cada partícula x_t^i es propagada por μ_{t+1}^i en el próximo paso de tiempo para realizar el muestreo a partir de la posterior. El método resultante es particularmente eficiente porque sólo requiere de la habilidad para muestrear del modelo de transición y evaluar la función de verosimilitud $p(y_t\,|\,x_t)$. Esto hace que el FAP resulte atractivo en comparación con otros métodos alternativos que requieren de una estructura más especializada de los datos para muestrear a partir de la posterior, además su flexibilidad de implementación permite incorporar diversas técnicas para mejorar su funcionamiento en problemas específicos, como es el FAP que se usa en este trabajo para el MVEG planteado en (1) y en (2), donde la meta es muestrear las variables estado $\{h_1^1, \ldots, h_t^M\}$ a partir de la función de densidad de probabilidad filtrada $p(h_t|F_t, \theta)$, con F_t denotando la información disponible hasta el tiempo t. En este sentido, en este trabajo se plantea el siguiente algoritmo:

Filtro auxiliar de partículas para el MVEG

1. Inicializar el algoritmo con una muestra $h_0^1, \ldots, h_0^M$ de la distribución $p(h_0)$.

2. Dada $\{h_{t-1}^1, \ldots, h_{t-1}^M\}$ de $p(h_t|F_{t-1}, \mu, \phi, \sigma_\eta^2)$, calcular

$$\begin{aligned} \hat{h}_t^m &= \mu + \phi(h_{t-1}^m - \mu), \\ w_j &= p(y_t|\hat{h}_t^m), \quad m = 1, \ldots, M. \end{aligned}$$

3. Muestrear R veces los índices 1,2,. . . , M con probabilidades proporcionales a $\{w_m\}$, y obtener una muestra $\{i_1, \ldots, i_R\}$. Asociar la muestra indexada con los $\hat{h}_t^m$ correspondientes y obtener una muestra $\{\hat{h}_t^{i_1}, \ldots, \hat{h}_t^{i_R}\}$. Asociar la muestra indexada con los h_t^m y obtener otra muestra $\{h_t^{i_1}, \ldots, h_t^{i_R}\}$. En este trabajo se considera R cinco veces más grande que M.

4. Para cada valor de i_r simular

$$\check{h}_t^r \sim N(\mu + \phi(h_t^{i_r} - \mu), \sigma_\eta^2), \quad r = 1, \ldots, R.$$

5. Remuestrear M veces el conjunto $\{\check{h}_t^{i_1}, \ldots, \check{h}_t^{i_R}\}$ con probabilidades proporcionales a

$$\frac{p(y_t|\check{h}_t^r)}{p(y_t|\hat{h}_t^{i_r})}, \quad r = 1, \ldots, R,$$

para producir una muestra filtrada $\{h_t^1, \ldots, h_t^M\}$ de $p(h_t|F_t, \mu, \phi, \sigma_\eta^2)$.

4 Estimación de parámetros para el modelo MVEG a través del muestreador de Gibbs

Se asume a priori que los parámetros del MVEG, $\theta = (\mu, \phi, \sigma_\eta^2)$, son independientes entre sí, de manera que $p(\mu, \phi, \sigma_\eta^2) = p(\mu)p(\phi)p(\sigma_\eta^2)$, y que:

$$\begin{aligned} p(\mu) &\sim N(\alpha_\mu, \beta_\mu^2), \\ p(\phi) &\sim N(\alpha_\phi, \beta_\phi^2)\, I_{(-1,1)}(\phi), \\ p(\sigma_\eta^2) &\sim IG(\alpha_\sigma, \beta_\sigma), \end{aligned} \tag{15}$$

donde $IG(,)$ denota la distribución inversa gamma, y se usa una distribución normal truncada para el parámetro ϕ con el fin de descartar el comportamiento cerca de las raíces unitarias.

Luego, por la regla de Bayes, las distribuciones condicionales a posteriori de cada uno de los parámetros del MVEG están dadas como:

$$\begin{aligned} p(\mu \mid \mathbf{y}, \mathbf{h}, \phi, \sigma_\eta^2) &\propto p(\mathbf{h} \mid \mu, \phi, \sigma_\eta^2)\, p(\mu), \\ p(\phi \mid \mathbf{y}, \mathbf{h}, \sigma_\eta^2, \mu) &\propto p(\mathbf{h} \mid \mu, \phi, \sigma_\eta^2)\, p(\phi), \\ p(\sigma_\eta^2 \mid \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mu, \phi) &\propto p(\mathbf{h} \mid \mu, \phi, \sigma_\eta^2)\, p(\sigma_\eta^2) \end{aligned} \tag{16}$$

y al condicionar de manera sucesiva se obtiene:

$$p(\mathbf{h} \mid \mu, \phi, \sigma_\eta^2) = p(h_0 \mid \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \prod_{t=1}^{T} p(h_t \mid h_{t-1}, \mu, \phi, \sigma_\eta^2). \tag{17}$$

Al insertar las densidades a priori $p(\sigma_\eta^2)$, $p(\phi)$, $p(\mu)$ y (17) en (16), el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} p(\sigma_\eta^2 | y, h, \mu, \phi) &\propto p(h_0 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \prod_{t=1}^{T} p(h_t | h_{t-1}, \mu, \phi, \sigma_\eta^2)\ p(\sigma_\eta^2), \\ p(\phi | y, h, \sigma_\eta^2, \mu) &\propto p(h_0 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \prod_{t=1}^{T} p(h_t | h_{t-1}, \mu, \phi, \sigma_\eta^2)\ p(\phi), \\ p(\mu | y, h, \phi, \sigma_\eta^2) &\propto p(h_0 | \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \prod_{t=1}^{T} p(h_t | h_{t-1}, \mu, \phi, \sigma_\eta^2)\ p(\mu). \end{aligned}$$

Luego se obtiene la distribución condicional a posteriori para cada uno de los parámetros como se detalla a continuación:

a) Distribución condicional a posteriori para σ_η^2:

$$\begin{aligned}
p(\sigma_\eta^2|y,h,\mu,\phi) &\propto p(h|\mu,\phi,\sigma_\eta^2)\,p(\sigma_\eta^2)\\
&\propto p(h_0|\mu,\phi,\sigma_\eta^2)\prod_{t=1}^{T}p(h_t|h_{t-1},\mu,\phi,\sigma_\eta^2)\;p(\sigma_\eta^2)\\
&\propto \left(\frac{1}{\sigma_\eta^2}\right)^{\left(\alpha_\sigma+\dfrac{T+1}{2}\right)+1}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{\left(\beta_\sigma+\frac{1}{2}(h_0-\mu)^2(1-\phi^2)+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(h_t-\mu-\phi(h_{t-1}-\mu))^2\right)}{\sigma_\eta^2}\right)\\
&\sim Inv-Gamma(\hat{\alpha}_\sigma,\hat{\beta}_\sigma), \qquad (18)
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_\sigma &= \alpha_\sigma+\frac{T+1}{2},\\
\hat{\beta}_\sigma &= \beta_\sigma+\frac{1}{2}(h_0-\mu)^2(1-\phi^2)+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(h_t-\mu-\phi(h_{t-1}-\mu))^2.
\end{aligned}$$

b) Distribución posterior condicional para ϕ:

$$\begin{aligned}
p(\phi|y,h,\sigma_\eta^2,\mu) &\propto p(h|\mu,\phi,\sigma_\eta^2)\,p(\phi)\\
&\propto p(h_0|\mu,\phi,\sigma_\eta^2)\prod_{t=1}^{T}p(h_t|h_{t-1},\mu,\phi,\sigma_\eta^2)\;p(\phi)\\
&\propto \exp\Bigg\{-\frac{1}{2}\Bigg[\phi^2\left(-\frac{(h_0-\mu)+\sum_{t=1}^{T}(h_{t-1}-\mu)^2}{\sigma_\eta^2}+\frac{1}{\beta_\phi^2}\right)\\
&\qquad -2\phi\left(\frac{\sum_{t=1}^{T}(h_t-\mu)(h_{t-1}-\mu)}{\sigma_\eta^2}+\frac{\alpha_\phi}{\beta_\phi^2}\right)\Bigg]\Bigg\}\,I_{(-1,1)}(\phi)\\
&\sim N\left(\frac{D}{C},\frac{1}{C}\right)I_{(-1,1)}(\phi), \qquad (19)
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{(h_0-\mu)+\sum_{t=1}^{T}(h_{t-1}-\mu)^2}{\sigma_\eta^2}+\frac{1}{\beta_\phi^2},\\
D &= \frac{\sum_{t=1}^{T}(h_t-\mu)(h_{t-1}-\mu)}{\sigma_\eta^2}+\frac{\alpha_\phi}{\beta_\phi^2}.
\end{aligned}$$

c) Distribución posterior condicional para μ:

$$\begin{aligned}
& p(\mu|y,h,\phi,\sigma_\eta^2) && (20)\\
\propto \quad & p(h|\mu,\phi,\sigma_\eta^2)\, p(\mu) \\
& +\frac{1}{\sigma_\eta^2}\sum_{t=1}^{T}\left[(-2\mu(1-\phi)(h_t-h_{t-1})+\mu^2(1-\phi)^2)+\frac{\mu}{\beta_\mu^2}-\frac{2\mu\alpha_\mu}{\beta_\mu^2}\right] \\
\propto \quad & \exp\Bigg\{-\frac{1}{2}\Bigg[\mu^2\underbrace{\left(\frac{1-\phi^2+T(1-\phi)^2}{\sigma_\eta^2}+\frac{1}{\beta_\mu^2}\right)}_{A} \\
& -2\mu\underbrace{\left(\frac{h_0(1-\phi^2)+(1-\phi)\sum_{t=1}^{T}(h_t-h_{t-1})}{\sigma_\eta^2}+\frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu^2}\right)}_{B}\Bigg]\Bigg\} && (21)
\end{aligned}$$

completando cuadrados en (20):

$$\begin{aligned}
A\mu^2-2\mu B &= A\left(\mu^2-2\mu\frac{B}{A}\right)\\
&= A\left(\mu^2-2\mu\frac{B}{A}+\frac{B^2}{A^2}\right)-\frac{B^2}{A^2}A\\
&= A\left(\mu-\frac{B}{A}\right)^2,
\end{aligned}$$

entonces, la expresión (20) queda:

$$p(\mu|y,h,\phi,\sigma_\eta^2) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}A\left(\mu-\frac{B}{A}\right)^2\right) \tag{22}$$

$$\sim N\left(\frac{B}{A},\frac{1}{A}\right). \tag{23}$$

Luego, dada las distribuciones condicionales a posteriori en (18), (19) y (22), se usa el algoritmo del muestreador de Gibbs para la actualización de los parámetros del MVEG como sigue:

1. Se inicializa $\theta^{(0)}=(\mu^{(0)},\phi^{(0)},\sigma_\eta^{2^{(0)}})$.
2. Para $t=1,\ldots,T$,
   - Generar $\sigma_\eta^{2^{(t)}}$ de $p(\sigma_\eta^2|y,h^{(t)},\mu^{(t-1)},\phi^{(t-1)})$.
   - Generar $\phi^{(t)}$ de $p(\phi|y,h^{(t)},\sigma_\eta^{2^{(t)}},\mu^{(t-1)})$.

- Generar $\mu^{(t)}$ de $p(\mu|y, h^{(t)}, \phi^{(t)}, \sigma_\eta^{2(t)})$.

3. Retorna los valores $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(T)}\}$.

Una vez obtenidas las trazas simuladas a partir de la distribución a posteriori de los parámetros de interés, es necesario hacer un diagnóstico de convergencia a largo plazo para probar la hipótesis nula de que las muestras simuladas provienen de una distribución estacionaria. Una de estas pruebas es el diagnóstico de convergencia de [14] que utiliza el estadístico de Cramer-Von-Mises.

Toda la metodología propuesta para ajustar el MVEG se implementó bajo el entorno de programación R (www.r-project.org) y el análisis de convergencia de las trazas simuladas a partir de las distribuciones a posteriori de interés, se realizó usando el paquete CODA perteneciente al entorno de R.

5 Resultados

En esta sección se presenta los resultados del ajuste del MVEG bajo la metodología propuesta que se implementó para la serie de retornos de datos simulados y para la serie de retornos del Standard and Poor's 500 (S&P 500) para el periodo $1995 - 2003$.

5.1 Datos simulados

Para realizar el proceso de inferencia y estimación del MVEG, se simuló una serie de observaciones con $T = 3000$ y $M = 600$ y se consideró los valores iniciales para los parámetros $(\mu, \phi, \sigma_\eta^2) = (0.49, 0.975, 0.05)$. Con estas observaciones simuladas, y_t, se ajustó el MVEG y como $T = 3000$ se consideró entonces presentar las $M = 600$, muestras simuladas para μ, ϕ y σ_η^2, respectivamante, pero solo la densidad a posteriori para $t = 500$, $t = 1000$ $t = 2000$ y $t = 3000$ por las limitaciones de espacio. Sin embargo, hay que acotar que para cada t con $t = 1, \ldots, 3000$ se obtuvo convergencia pero por las limitaciones de espacio sólo se consideró mostrar los resultados para los valores de t indicados.

En este sentido, usando el muestreador de Gibbs con las distribuciones a posteriori dadas por (18), (19) y (22), se obtuvieron las muestras simuladas para cada uno de los parámetros μ, ϕ y σ_η^2. Las Figuras 1, 2 y 3 muestran las trazas y la densidades empíricas a posteriori para los valores simulados de μ, ϕ y σ_η^2, respectivamente.

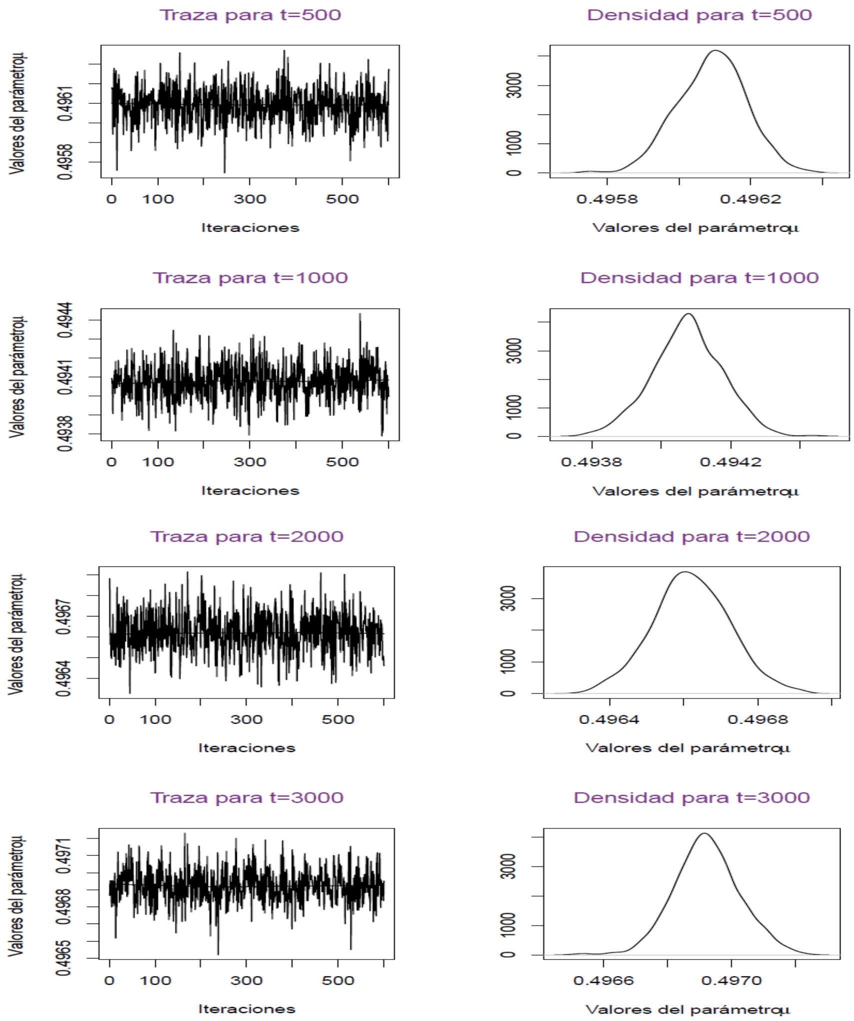

Figura 1: Trazas simuladas para el parámetro μ y densidades empíricas.

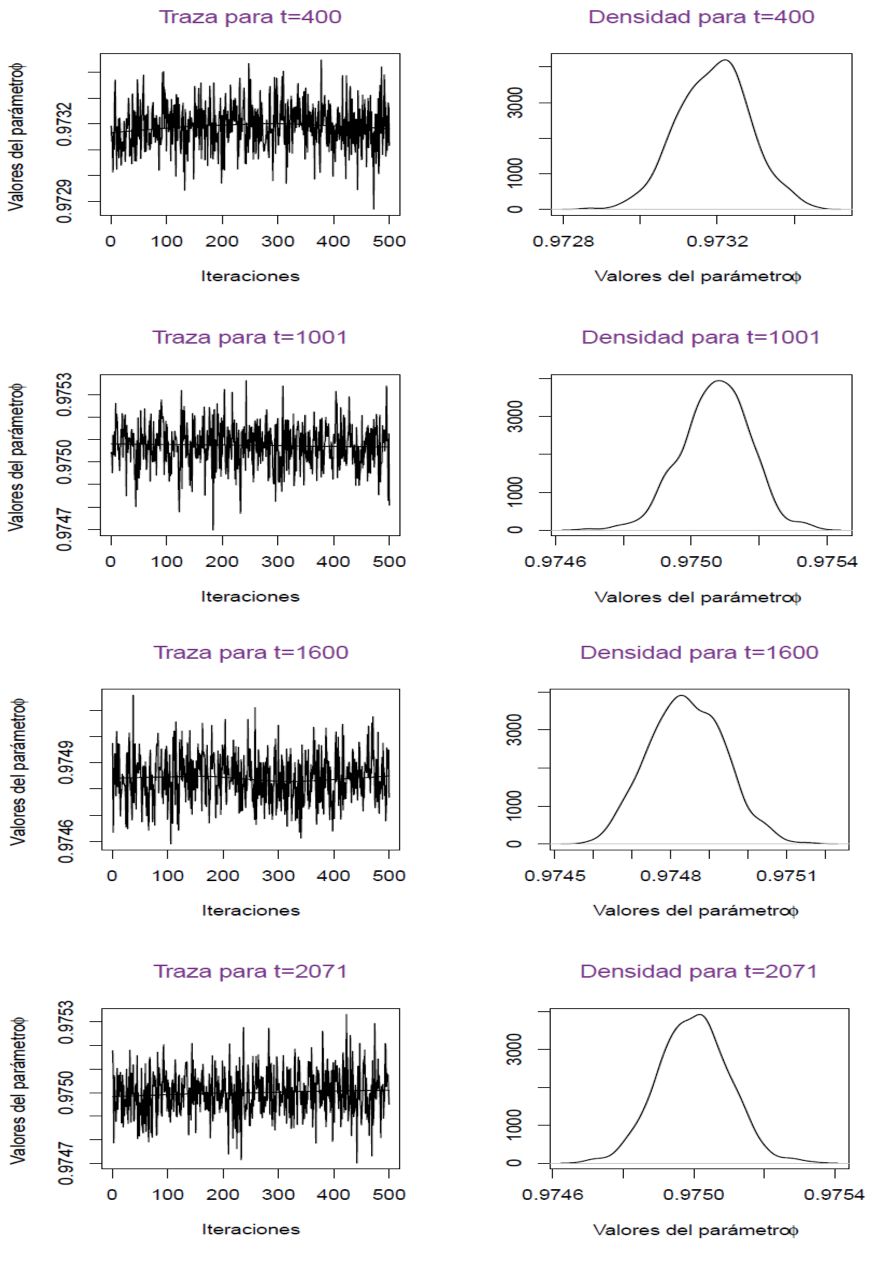

Figura 2: Trazas simuladas para el parámetro ϕ y densidades empíricas.

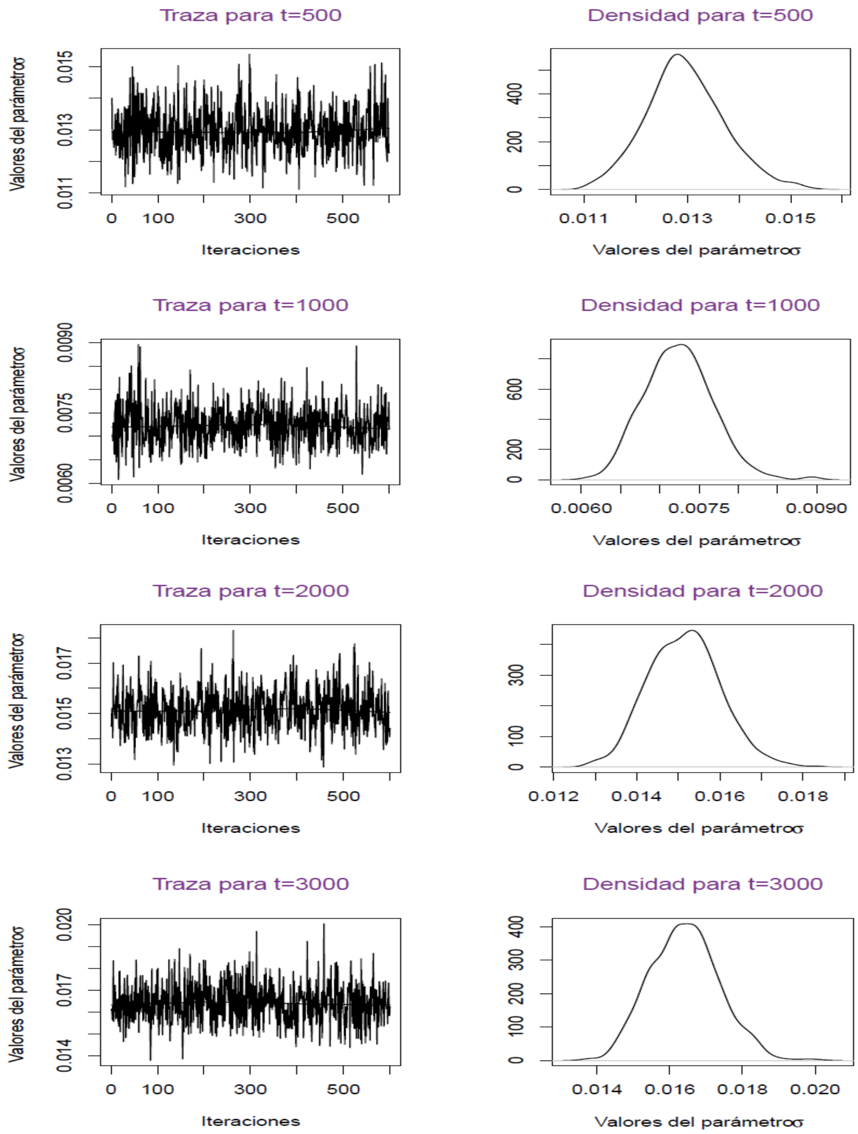

Figura 3: Trazas simuladas para el parámetro σ y sus densidades empíricas.

En cada uno de estos gráficos se observa que las trazas convergen y se estabilizan casi simétricamente alrededor de un valor que corresponde a su media a posteriori, como bien lo señalan las respectivas densidades empíricas.

Por otra parte, en las Figuras 4, 5 y 6, se observan las autocorrelaciones de cada una de las muestras simuladas para cada uno de los parámetros μ, ϕ y σ_η^2 con cada uno de los valores seleccionados de t. Estas autocorrelaciones muestrales dan evidencias de que las trazas generadas son muestras aproximadamente independientes.

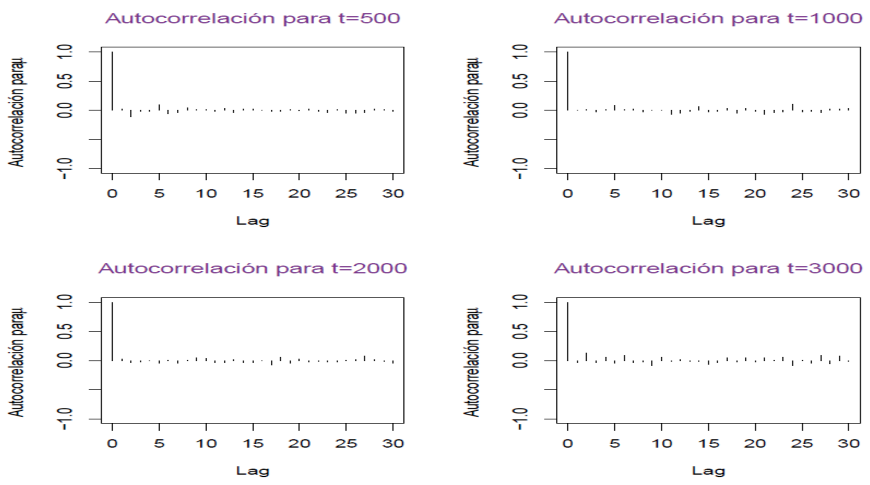

Figura 4: Autocorrelaciones simuladas para el parámetro μ.

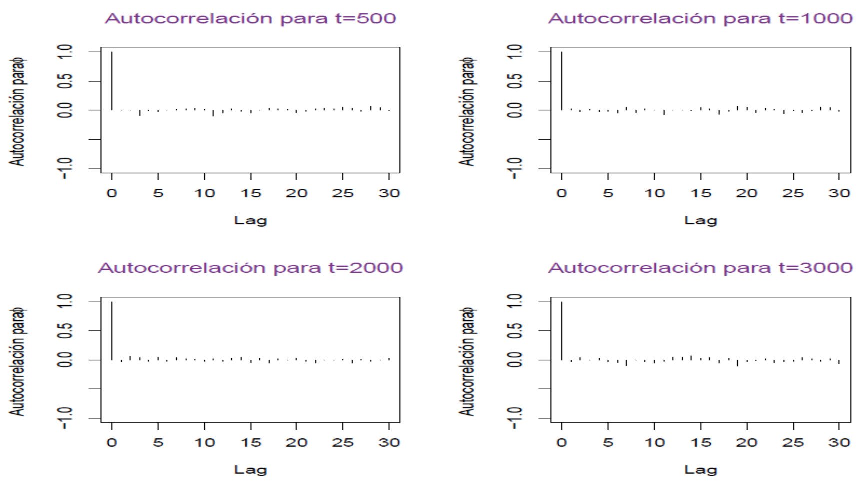

Figura 5: Autocorrelaciones simuladas para el parámetro ϕ.

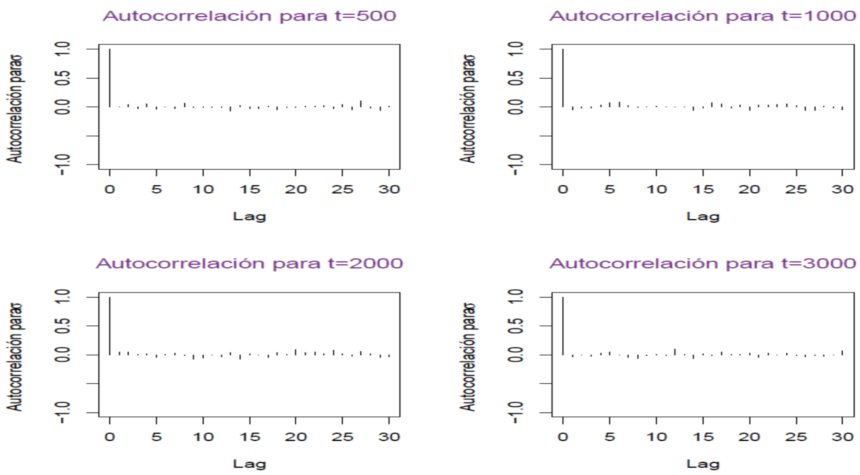

Figura 6: Autocorrelaciones simuladas para el parámetro σ_η^2.

La Tabla 1 muestra los resultados de la prueba de diagnóstico de convergencia de [14] que consiste en una prueba de estacionaridad basada en la teoría del puente Browniano y el estadístico de Cramer-von-Mises. Los resultados obtenidos indican la convergencia de las trazas simuladas de los parámetros μ, ϕ y σ_η^2, para los casos $t = 500$, $t = 1000$, $t = 2000$ y $t = 3000$.

Tabla 1: Prueba de diagnóstico de convergencia de Heidelberger-Welch para las trazas simuladas de los parámetros μ, ϕ y σ_η^2.

Parámetros	$N°$ de Muestras	Prueba de estacionaridad	P-valor	Prueba Halfwidth	Media a posterior	SD
μ_{500}	600	No rechazar	0.980	No rechazar	0.496	9.583e-05
μ_{1000}	600	No rechazar	0.457	No rechazar	0.494	1.003e-04
μ_{2000}	600	No rechazar	0.926	No rechazar	0.497	1.030e-04
μ_{3000}	600	No rechazar	0.890	No rechazar	0.497	1.028e-04
ϕ_{500}	600	No rechazar	0.368	No rechazar	0.967	1.031e-04
ϕ_{1000}	600	No rechazar	0.639	No rechazar	0.967	1.005e-04
ϕ_{2000}	600	No rechazar	0.788	No rechazar	0.970	9.742e-05
ϕ_{3000}	600	No rechazar	0.097	No rechazar	0.970	1.005e-04
$\sigma^2_{\eta,500}$	600	No rechazar	0.620	No rechazar	0.013	7.504e-04
$\sigma^2_{\eta,1000}$	600	No rechazar	0.584	No rechazar	0.007	4.347e-04
$\sigma^2_{\eta,2000}$	600	No rechazar	0.512	No rechazar	0.015	8.563e-04
$\sigma^2_{\eta,3000}$	600	No rechazar	0.422	No rechazar	0.016	9.413e-04

Para cada $t = 1, \ldots, 3000$ se calculó la media a posteriori de cada una de las trazas simuladas con $M = 1, \ldots, 600$ valores. La Figura 7 muestra la evolución en el tiempo de los valores de las medias a posteriori para las muestras simuladas de cada uno de los parámetros μ, ϕ y σ_η^2 en el transcurrir del tiempo, observándose poca variabilidad de estas medias en la medida que t incrementa.

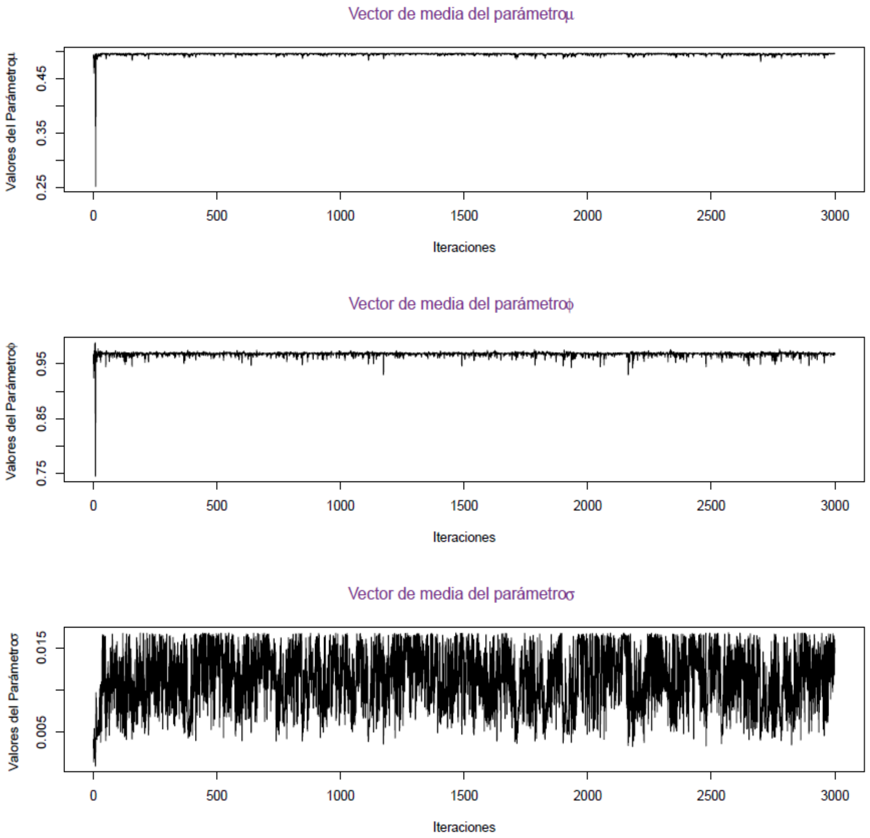

Figura 7: Vector de medias a posteriori de las trazas simuladas para cada uno de los parámetros.

Luego, usando el algoritmo de FAP propuesto, se predicen y actualizan los valores de la variable estado h_t que representa la volatilidad en el MVEG. De esta manera, para los datos y_t simulados se obtuvieron las trazas de tamaño $M = 600$ de h_t con $t = 1, \ldots, 3000$. Sin embargo, por las razones antes explicadas, se presentan los resultados de las trazas simuladas para h_t con $t = 500$, $t = 1000$, $t = 2000$ y $t = 3000$ obtenidas con el algoritmo de FAP propuesto.

La Figura 8 muestra las trazas simuladas para la volatilidad h_t con $t = 500$, $t = 1000$, $t = 2000$ y $t = 3000$, además de las densidades empíricas correspondientes, observándose que las mismas convergen alrededor de un valor central.

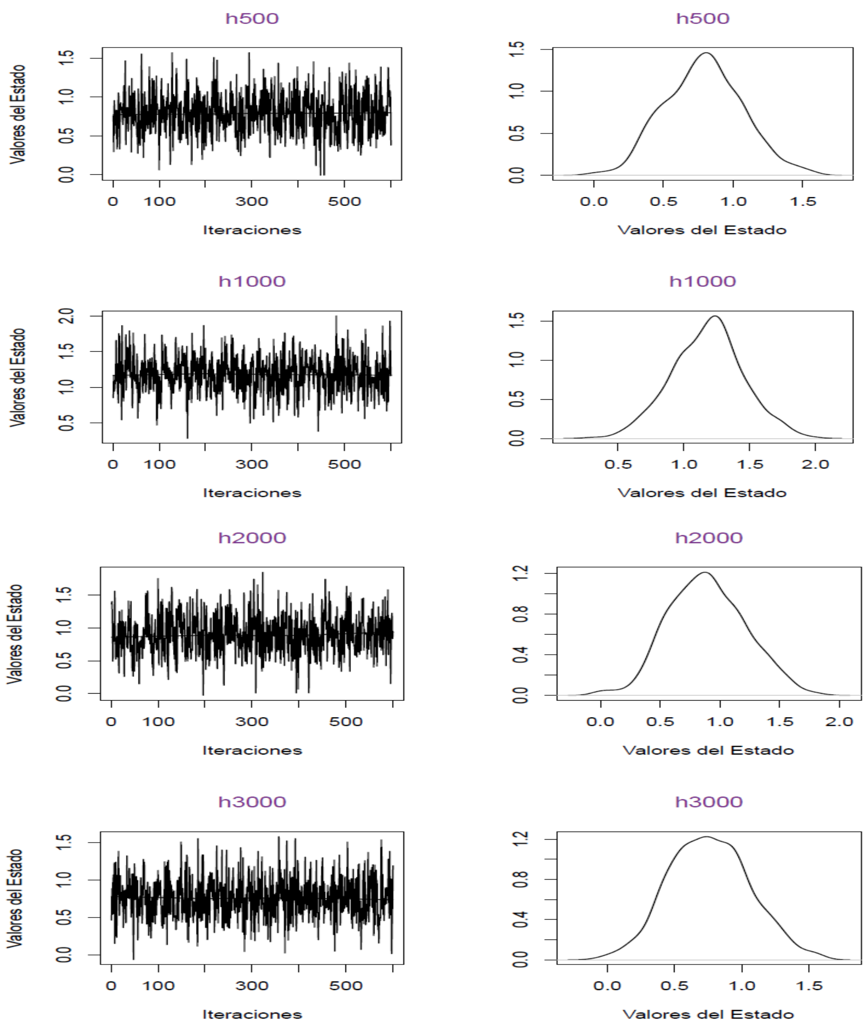

Figura 8: Trazas simuladas para la volatilidad h_t y densidades empíricas.

Las pruebas analíticas de la convergencia de las trazas simuladas para la volatilidad h_t, en los tiempos t que fueron seleccionados, son mostradas en la Tabla 2, y las mismas indican convergencia al valor donde las trazas simuladas se estabilizan y que se conoce como media a posteriori.

Tabla 2: Prueba de diagnóstico de convergencia de Heidelberger-Welch para las muestras simuladas de la volatilidad.

Estados	N^o de Muestras	Prueba de estacionaridad	P-valor	Prueba Halfwidth	Media a posterior	SD
h_{500}	600	No rechazar	0.941	No rechazar	0.790	0.279
h_{1000}	600	No rechazar	0.883	No rechazar	1.180	0.273
h_{2000}	600	No rechazar	0.345	No rechazar	0.895	0.322
h_{3000}	600	No rechazar	0.995	No rechazar	0.762	0.298

Finalmente, en la Figura 9 se pueden apreciar los retornos de los datos simulados y la volatilidad de los mismos para cada $t = 1, \ldots, 3000$, donde cada valor de esta volatilidad corresponde a la media a posteriori de las trazas simuladas a través del FAP propuesto. En general, se pueden apreciar periodos donde la volatilidad no es muy grande y donde los retornos no sufren grandes cambios, y periodos en los que la volatilidad es mayor, resultando periodos menos atractivos para los inversionistas porque se pueden presentar fugas de capitales. También, se puede apreciar que cada aumento en los retornos corresponde a un salto en la volatilidad estimada, por lo tanto al observar la correspondencia entre ambas gráficas de la Figura 9, se concluye que cambios bruscos en los retornos corresponden a valores altos en la volatilidad.

5.2 Datos reales: índice bursátil S&P 500

El índice Standard & Poor's 500, también conocido como S&P 500, es uno de los índices bursátiles más importantes y representativos de los Estados Unidos, que incluye las 500 compañías líderes que poseen acciones que se cotizan en la bolsa de New York o en NASDAQ, y que captura una cobertura de aproximadamente el 80% de la capitalización del mercado disponible. El S&P 500 está diseñado para ser uno de los principales indicadores de la evolución del mercado de valores en Estados Unidos. Se distingue de otros índices del mercado financiero de los Estados Unidos por la diversidad de rubros de las empresas que lo conforman, y por su metodología de ponderación que pesa a las empresas de acuerdo con su capitalización del mercado total que es de libre flotación, lo que significa que solo tiene en cuenta el número de acciones disponibles para su negociación

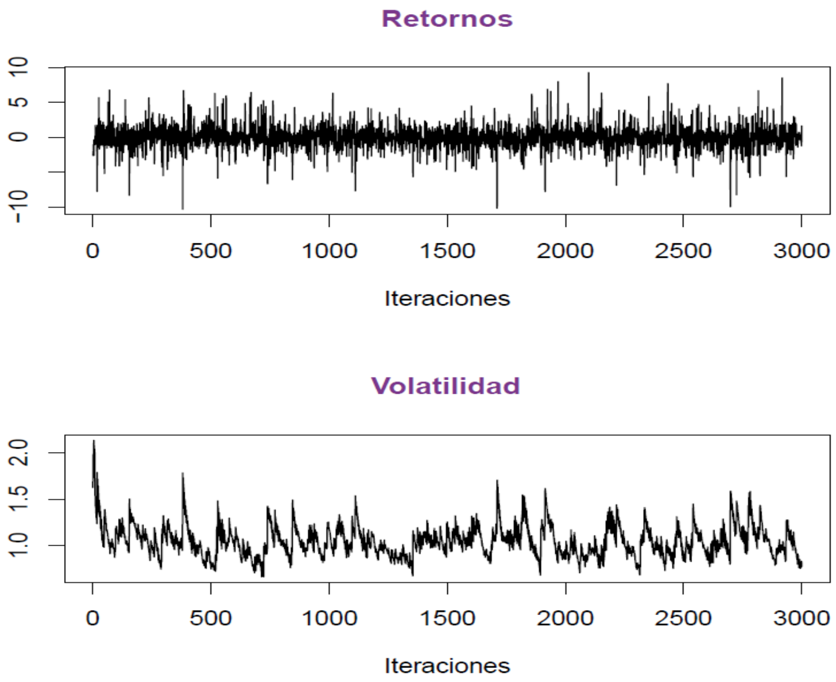

Figura 9: Retornos y volatilidad para datos simulados.

entre inversores institucionales y minoristas. De esta manera se excluye acciones inmovilizadas dentro de la propia empresa y las inversiones estatales.

Del índice de precio del S&P 500 se utilizaron los valores de apertura diarios en el periodo comprendido entre 16-05-1995 hasta el 24-04-2003, es decir, un total de 2072 observaciones (`http://www.econstats.com/index.htm`). Se escogieron los valores iniciales para los parámetros como $(\mu, \phi, \sigma_\eta^2) = (0.5, 0.975, 0.02)$, de acuerdo a la información preliminar que se tenía de los datos.

La Figura 10 muestra el valor del índice S&P 500 y los correspondientes retornos desde el año 1995 hasta el año 2003, donde se observa que para el periodo bajo estudio, el índice S&P 500 tiene una marcada tendencia a crecer y decrecer pero con grandes saltos, como también se observa en los retornos correspondientes.

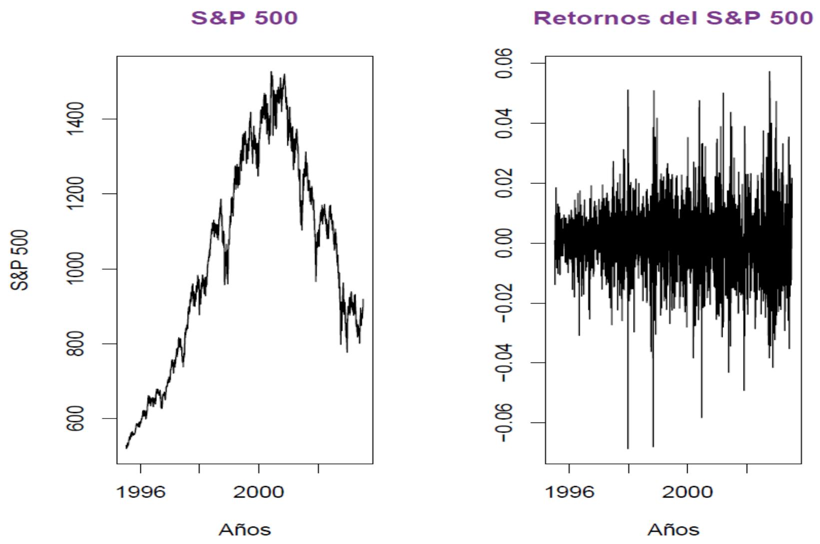

Figura 10: Datos y retornos del S&P 500.

Usando el muestreador de Gibbs, se obtuvieron las trazas simuladas de los parámetros μ, ϕ y σ_η^2 a partir de su distribución a posteriori de acuerdo a (18), (19) y (22). Como $T = 2072$, se considera presentar las $M = 500$ muestras simuladas para μ, ϕ y σ_η^2, y sus respectivas densidades a posteriori para $t = 400$, $t = 1001$, $t = 1600$ y $t = 2071$. Sin embargo, hay que acotar que para cada t con $t = 1, \ldots, 2072$ se obtuvo convergencia, pero por las limitaciones de espacio solo se considera mostrar los resultados para $t = 400$, $t = 1001$, $t = 1600$ y $t = 2071$.

En las Figuras 11, 12 y 13, se muestran las trazas simuladas para cada uno de los parámetros μ, ϕ y σ_η^2, y sus respectivas densidades empíricas para cada uno de los t seleccionados. En cada uno de ellos se observa que las trazas simuladas, para los t escogidos de manera sistemática, convergen alrededor de un valor que representa la media a posteriori en cada caso, y que corresponde a la moda de las densidades empíricas de cada una de las trazas.

Por otra parte, las Figuras 14, 19 y 20 muestran las autocorrelaciones para cada traza simulada en el caso de cada t, indicando que las trazas generadas son muestras aproximadamente independientes.

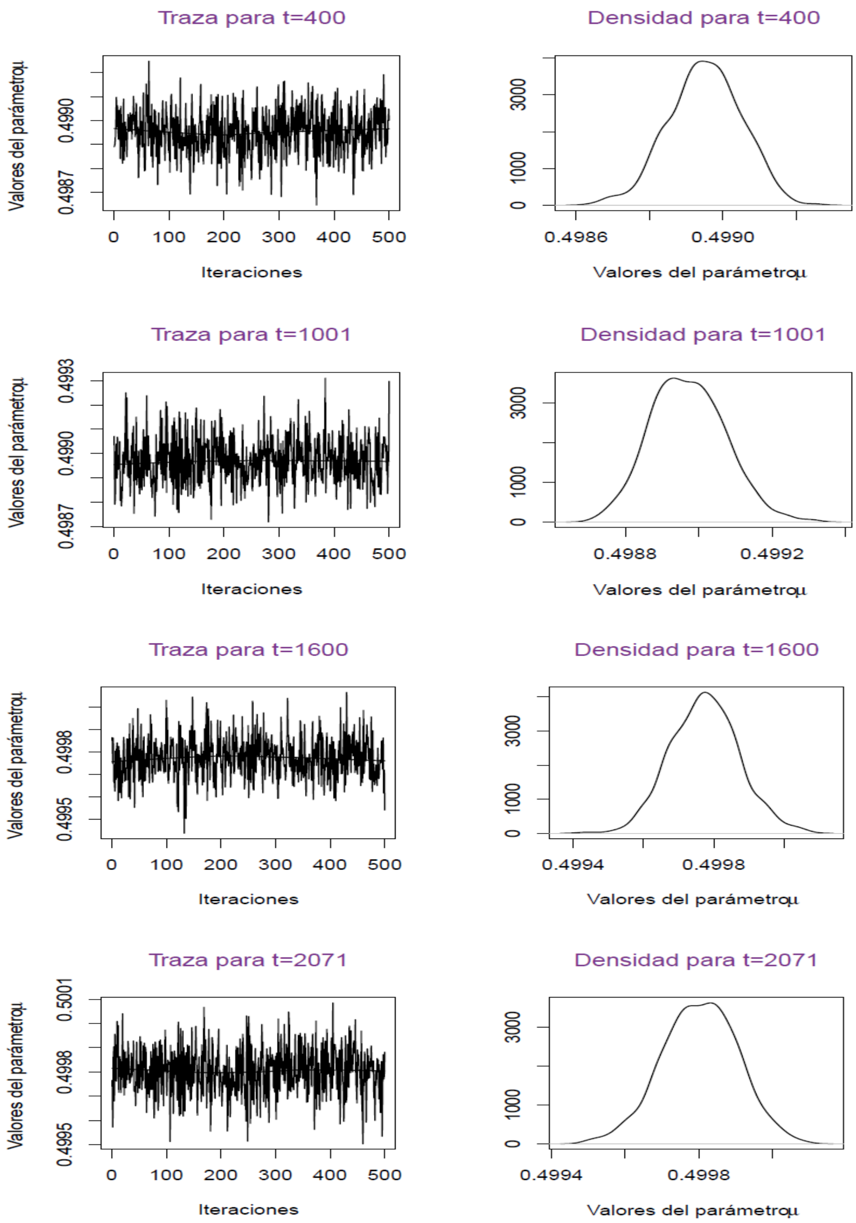

Figura 11: Trazas simuladas para el parámetro μ y densidades empíricas para el S&P 500.

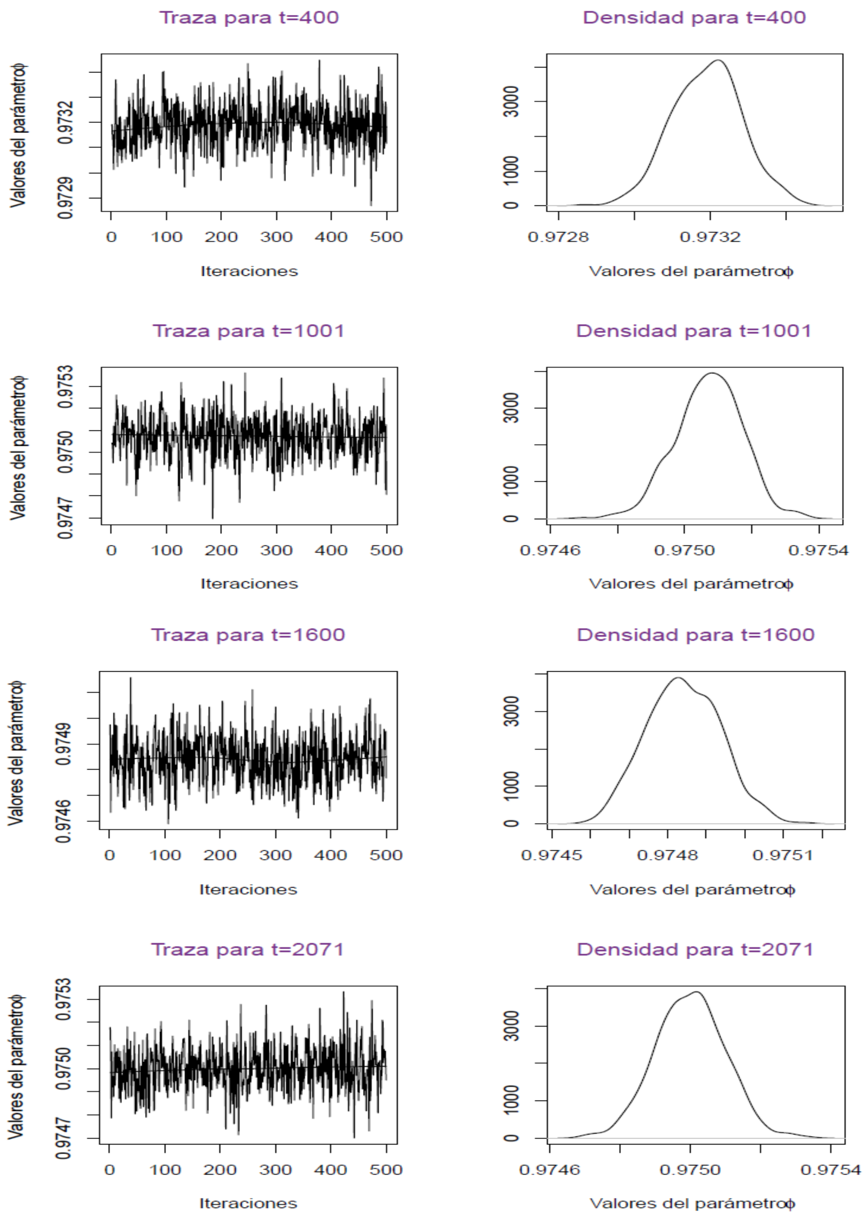

Figura 12: Trazas simuladas para el parámetro ϕ y densidades empíricas para el S&P 500.

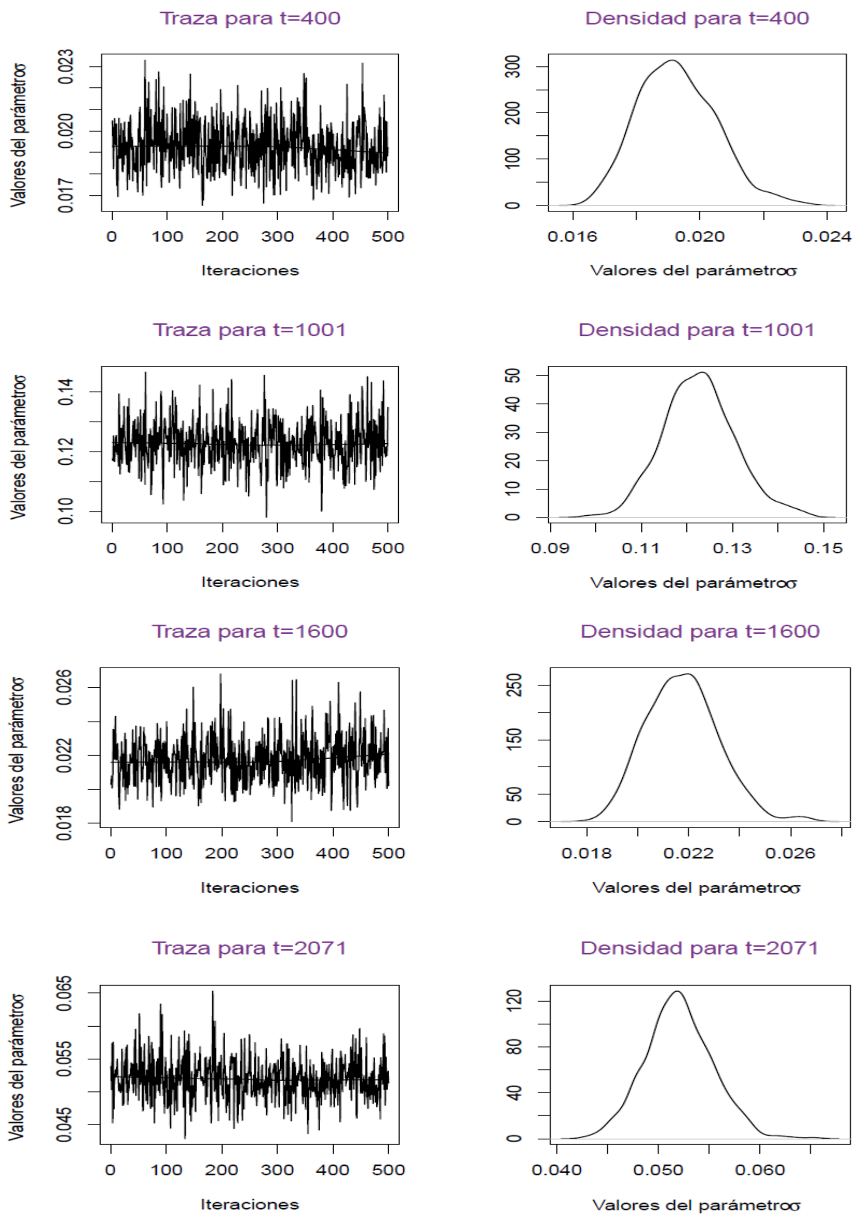

Figura 13: Trazas simuladas para el parámetro σ_η^2 y densidades empíricas para el S&P 500.

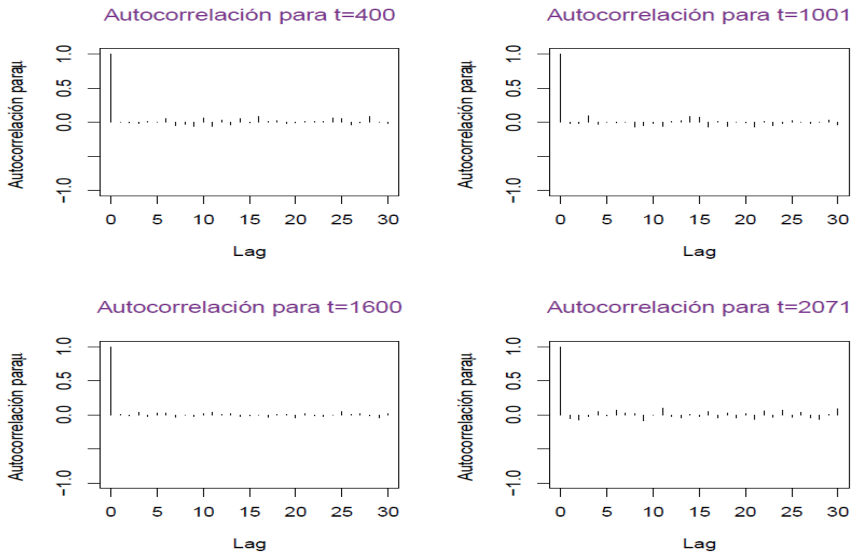

Figura 14: Autocorrelaciones simuladas para el parámetro μ para el S&P 500.

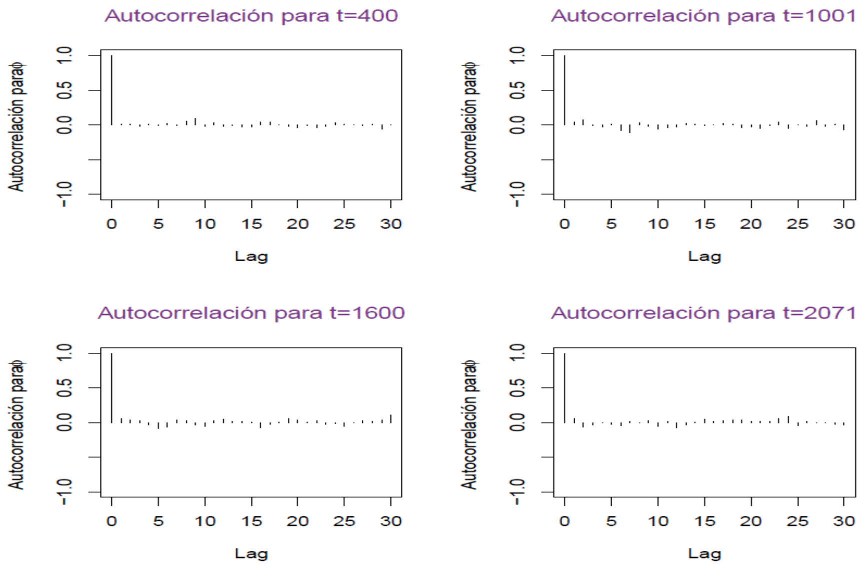

Figura 15: Autocorrelaciones simuladas para el parámetro ϕ para el S&P 500.

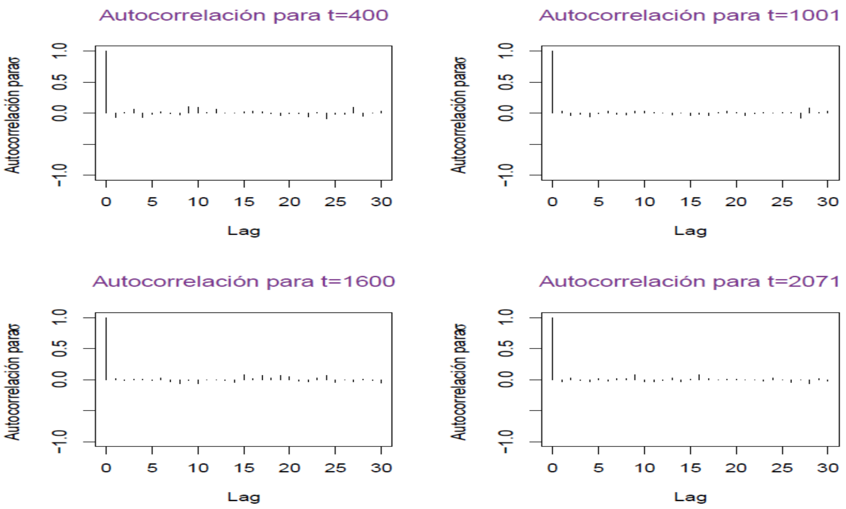

Figura 16: Autocorrelaciones simuladas para el parámetro σ^2_η para el S&P 500.

La Tabla 3 muestra los resultados de la prueba de diagnóstico de convergencia de [14] realizadas a cada una de las trazas simuladas de los parámetros μ, ϕ y σ^2_η en los tiempos t seleccionados. Estos resultados indican que realmente cada una de las trazas simuladas convergen a un valor que representan la media a posteriori.

Tabla 3: Prueba de diagnóstico de convergencia de Heidelberger-Welch para las trazas simuladas de los parámetros μ, ϕ y σ^2_η para el S&P 500.

Parámetros	N° de Muestras	Prueba de estacionaridad	P-valor	Prueba Halfwidth	Media a posterior	SD
μ_{400}	500	No rechazar	0.296	No rechazar	0.499	9.802e-05
μ_{1001}	500	No rechazar	0.823	No rechazar	0.499	1.008e-04
μ_{1600}	500	No rechazar	0.489	No rechazar	0.500	9.620e-05
μ_{2071}	500	No rechazar	0.680	No rechazar	0.500	1.015e-04
ϕ_{400}	500	No rechazar	0.216	No rechazar	0.973	9.227e-05
ϕ_{1001}	500	No rechazar	0.833	No rechazar	0.975	9.974e-05
ϕ_{1600}	500	No rechazar	0.400	No rechazar	0.975	9.492e-05
ϕ_{2071}	500	No rechazar	0.143	No rechazar	0.975	9.862e-05
σ_{400}	500	No rechazar	0.232	No rechazar	0.019	1.217e-03
σ_{1001}	500	No rechazar	0.757	No rechazar	0.123	7.887e-03
σ_{1600}	500	No rechazar	0.070	No rechazar	0.022	1.409e-03
σ_{2071}	500	No rechazar	0.144	No rechazar	0.052	3.298e-03

Para observar el comportamiento de los parámetros μ, ϕ y σ_η^2 a través del tiempo, para cada $t = 1, \ldots, 2072$ se calculó la media a posteriori de cada una de las trazas simuladas con $M = 1, \ldots, 500$ valores. La Figura 17 muestra los valores de las medias a posteriori de cada uno de los parámetros μ, ϕ y σ_η^2 en el transcurrir del tiempo, observándose poca variabilidad de estas medias en la medida que t incrementa.

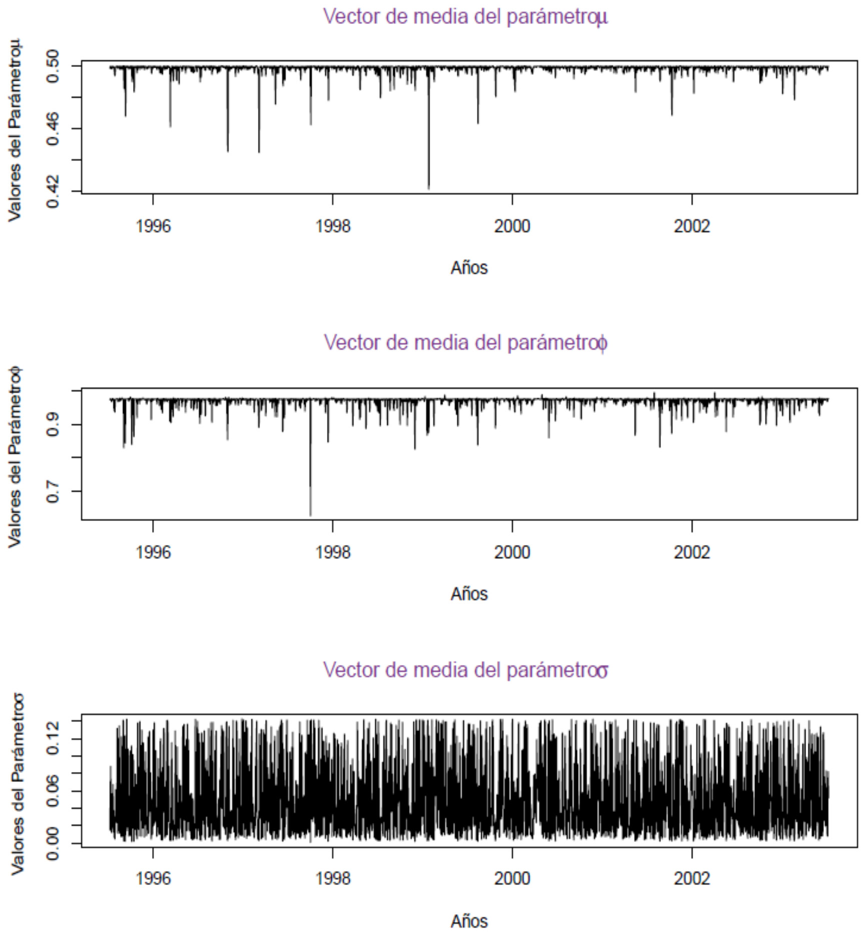

Figura 17: Vector de medias a posteriori de las trazas simuladas para cada uno de los parámetros para el S&P 500.

Por otra parte, para predecir y actualizar los valores de la variable estado h_t, que representa la volatilidad en el modelo MVEG, se usa el algoritmo de FAP propuesto. Para los retornos del S&P 500 se obtuvieron las trazas de tamaño $M = 500$ para h_t con $t = 1, \ldots, 2072$. Sin embargo, por razones de espacio, se presentan los resultados de las trazas simuladas para h_t con $t = 400$, $t = 1001$, $t = 1600$ y $t = 2071$. La Figura 18 muestra las trazas simuladas para la volatilidad h_t con $t = 400$, $t = 1001$, $t = 1600$ y $t = 2071$, además de las densidades empíricas correspondientes. Se puede observar que las trazas convergen alrededor de un valor central y este hecho implica que las densidades empíricas correspondientes sean aproximadamente simétricas alrededor de este valor central, que representa la media a posteriori. Además, en la Figura 19 se presentan las autocorrelaciones muestrales para las trazas simuladas de la volatilidad h_t, y estas gráficas indican que son muestras aproximadamente independientes.

Las pruebas de convergencia de las trazas simuladas para la volatilidad h_t en los tiempos t seleccionados, se muestran en la Tabla 4. Las pruebas indican que las trazas simuladas realmente convergen a un valor que representa la media posterior y que corresponde a la moda en las densidades empíricas que siguen estas trazas.

Tabla 4: Prueba de diagnóstico de convergencia de Heidelberger-Welch para la volatilidad del S&P 500.

Estados	N^{o} de Muestras	Prueba de estacionaridad	P-valor	Prueba Halfwidth	Media a posterior	SD
h_{400}	500	No rechazar	0.576	No rechazar	0.465	0.769
h_{1001}	500	No rechazar	0.558	No rechazar	0.480	0.684
h_{1600}	500	No rechazar	0.103	No rechazar	0.396	0.771
h_{2071}	500	No rechazar	0.525	No rechazar	0.376	0.607

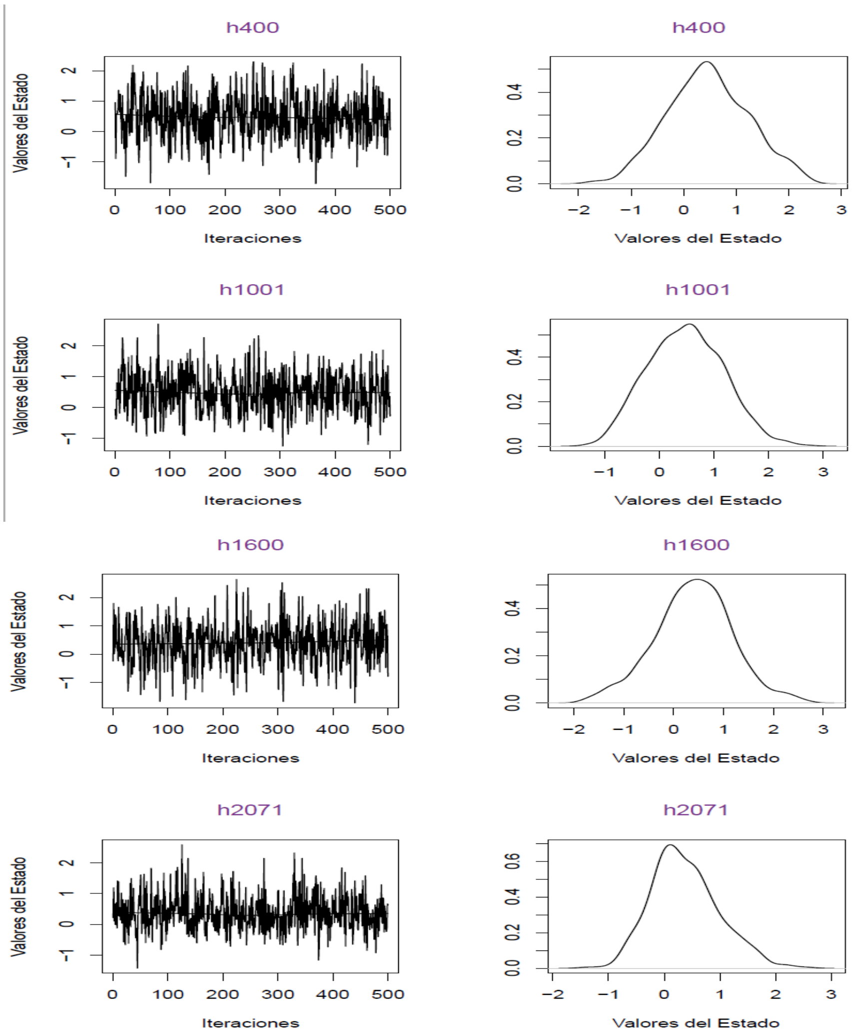

Figura 18: Trazas simuladas para la volatilidad h_t y densidades empíricas para el S&P 500.

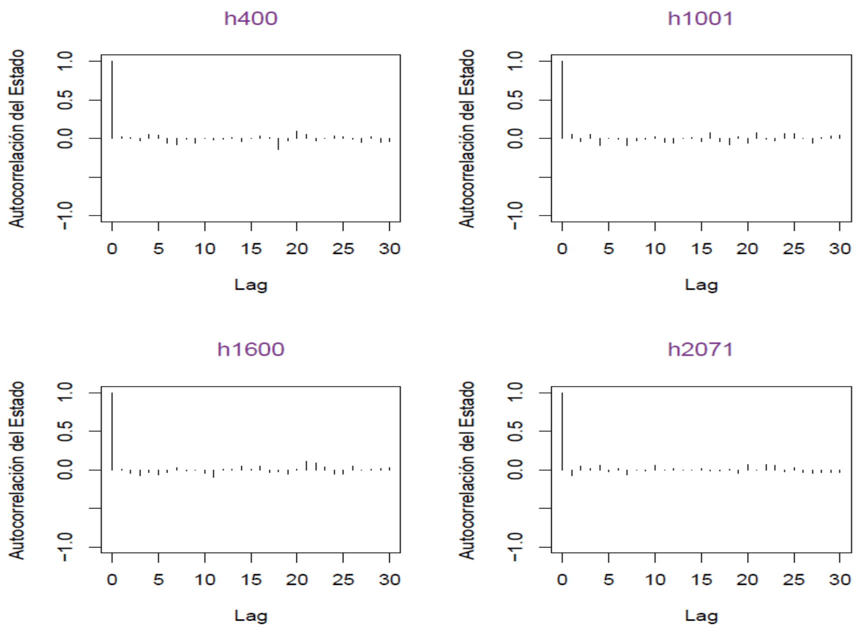

Figura 19: Autocorrelaciones simuladas para la volatilidad h_t para el S&P 500.

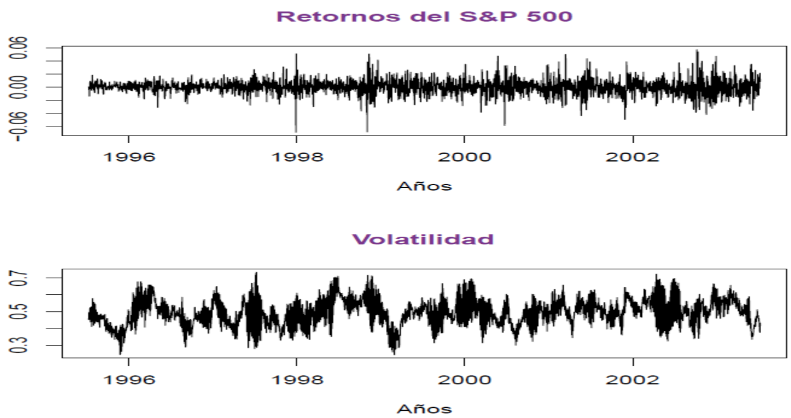

Figura 20: Retornos y volatilidad del S&P 500.

6 Discusión y conclusiones

En el presente trabajo se combinaron dos técnicas Monte Carlo para llevar a cabo la estimación simultánea de parámetros y estados en un modelo de volatilidad estocástica. La propuesta, que es el aporte principal de esta investigación, incluye la implementación de un algoritmo Monte Carlo Secuencial llamado filtro auxiliar de partículas, que permite estimar los estados latentes del sistema dinámico involucrado, en conjunto con un algoritmo Monte Carlo por cadenas de Markov llamado muestreador de Gibbs, con el cual se estiman los parámetros. Estos métodos son una herramienta estándar para hacer inferencia, debido a que proporcionan un enfoque sistemático para el cálculo de las probabilidades a posteriori, y son muy utilizados en problemas de análisis de datos en modelos complejos y de grandes dimensiones. Para implementar los algoritmos, se expresó el modelo en la forma espacio estado, se establecieron las distribuciones a priori y se calcularon las distribuciones marginales condicionales a posteriori. Para ilustrar la metodología, se hizo uso de dos conjuntos de datos: datos sintéticos y la serie del índice de precio Standard and Poor's 500 (S&P500) para el periodo $1995 - 2003$. Para cada conjunto de datos se estimaron los estados y parámetros del MVEG usando la metodología propuesta, y posteriormente se realizaron las pruebas de diagnóstico de convergencia para las muestras simuladas a partir de cada distribución a posteriori, demostrándose que en efecto las cadenas de muestras simuladas provienen de distribuciones estacionarias. Finalmente, los resultados obtenidos evidencian que la metodología propuesta captura adecuadamente la dinámica de la volatilidad cuando existe una respuesta asimétrica de esta ante un shock de diferente signo. La combinación del filtro auxiliar de partículas, como método MCS, con el muestreador de Gibbs, como método MCMC, permitió el manejo de la estructura espacio-estado compleja del MVEG, logrando la estimación tanto de la volatilidad subyacente del sistema como los parámetros del modelo. Sin embargo, el MVEG puede resultar muy restringido para muchas series de tiempo financieras, por lo que se recomienda incluir el efecto palanca (*leverage*) y saltos (*jumps*) siguiendo la metodología propuesta en esta investigación.

Agradecimientos

Agradecemos al Editor de la Revista y a los árbitros por sus valiosas sugerencias y contribuciones para mejorar este manuscrito. Este trabajo fue parcialmente apoyado por el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, Venezuela, y la Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales, Universidad Yachay Tech, Ecuador.

Referencias

[1] Black, F.; Scholes, M. (1973) "The pricing of options and corporate liabilities", *The Journal of Political Economy* **81**(3): 637–654.

[2] Carneiro, P.; Hansen, K.; Heckman, J. (2003) "Estimating distributions of treatment effects with an application to the returns to schooling and measurement of the effects of uncertainty on college choice", *International Economic Review* **44**(2): 361–422.

[3] Chib, S.; Nardari, F.; Shephard, N. (2002) "Markov chain Monte Carlo methods for stochastic volatility models", *Journal of Econometrics* **108**(2): 281–316.

[4] Clark, P. (1973) "A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices", *Econometrica* **41**(1): 135–155.

[5] Danielsson, J. (1994) "Stochastic volatility in asset prices: estimation with simulated maximum likelihood", *Journal of Econometrics* **64**: 375–400.

[6] Danielsson, J.; Richard, J. F. (1993) "Accelerated gaussian importance sampler with application to dynamic latent variable models", *Journal of Applied Econometrics* **8**(1): 153–173.

[7] Del Moral, P.; Doucet, A. (2003) "On a class of genealogical and interacting metropolis models", in: J. Azéma, M. Emery, M. Ledoux & M. Yor (Eds.) *Séminaire de Probabilités XXXVII*, Springer, Berlin: 415–446.

[8] Doucet, A.; De Freitas, N.; Gordon, N. (2001) "An introduction to sequential Monte Carlo methods", in: A. Doucet, N. De Freitas & N. Gordon (Eds.) *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer, New York: 3–14.

[9] Doucet, A.; Johansen, A. (2011) "A tutorial on particle filtering and smoothing: fifteen years later", in: D. Crisan & B. Rozovskii (Eds.) *The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering*, Oxford University Press, New York: 656–704.

[10] Gallant, A.; Hsieh, D.; Tauchen, G. (1991) "On fitting a recalcitrant series: the pound/dollar exchange rate, 1974–1983", in: W. Bartnett, J. Powell & G. Tauchen (Eds.) *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics*, Cambridge University Press, New York: 199–240.

[11] Ghysels, E.; Harvey, A.C.; Renault, E. (1996) "Stochastic volatility", in: C. R. Rao & G. Maddala (Eds.) *Statistical Models in Finance*, North-Holland, Amsterdam: 119–191.

[12] Gordon, N. J.; Salmond, D. J.; Smith, A. F. M. (1993) "Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation", *IEE Proceedings-F* **140**(2): 107–113.

[13] Harvey, A.; Ruiz, E.; Shephard, N. (1994) "Multivariate stochastic variance models", *The Review of Economic Studies* **61**(2): 247–264.

[14] Heidelberger, P.; Welch, P. (1983) "Simulation run length control in the presence of an initial transient", *Operations Research* **31**(6):1109–1144.

[15] Hull, J.; White, A. (1987) "The pricing of options on assets with stochastic volatilities", *The Journal of Finance* **42**(2): 281–300.

[16] Isard, M.; Blake, A. (1998) "Condensation-conditional density propagation for visual tracking", *International Journal of Computer Vision* **29**(1): 5–28.

[17] Jacquier, E.; Polson, N.; Rossi, P. (1994) "Bayesian analysis of stochastic volatility models", *Journal of Business and Economic Statistics* **12**(4): 371–389.

[18] Kim, S.; Shephard, N.; Chib, S. (1998) "Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models", *The Review of Economic Studies* **65**(3): 361–393.

[19] Latané, H.; Rendleman, R. (1976) "Standard deviations of stock price ratios implied in option prices", *The Journal of Finance* **31**(2): 369–381.

[20] Liu, J. S. (2001) *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. Springer, New York.

[21] Liu, J. S.; Chen, R. (1998) "Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems", *Journal of the American Statistical Association* **93**(443): 1032–1044.

[22] Omori, Y.; Chib, S.; Shephard, N.; Nakajima, J. (2007) "Stochastic volatility with leverage: fast and efficient likelihood inference", *Journal of Econometrics* **140**(2): 425–449.

[23] Pitt, M.; Shephard, N. (1999) "Filtering via simulation: auxiliary particle filters", *Journal of the American Statistical Association* **94**(446): 590–599.

[24] Shephard, N.; Pitt, M.K. (1997) "Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series", *Biometrika* **84**(3): 653–667.

[25] Shephard, N. (2005) *Stochastic Volatility: Selected Readings*. Oxford University Press, United States.

[26] Tauchen, G.; Pitt, M. (1983) "The price variability-volume relationship on speculative markets", *Econometrica* **51**(2): 485–505.

[27] Taylor, S. (1986) *Modelling Financial Time Series*. John Wiley & Sons, New York.

[28] Watanabe, T. (1999) "A non-linear filtering approach to stochastic volatility models with an application to daily stock returns", *Journal of Applied Econometrics* **14**(2): 101–121.

[29] Yu, J. (2005) "On leverage in a stochastic volatility model", *Journal of Econometrics* **127**(2): 165–178.