© Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2019 **26**(1) : 115–138
cimpa – ucr issn: 1409-2433 (Print), 2215-3373 (Online)
doi: https://doi.org/10.15517/rmta.v26i1.35526

Patrones de recurrencia en las fichas del k-minó

Recurrence patterns in the k-mino game

César Andrés Morales* José Herman Muñoz† Miguel Armando Rodríguez‡

Received: 15/Feb/2018; Revised: 3/Sep/2018; Accepted: 19/Sep/2018

---

*Departamento de Física, Universidad del Tolima, A. A. 546, Ibagué, Colombia e Institución Educativa Francisco de Miranda, Rovira-Tolima, Colombia. E-Mail: camoralesr@ut.edu.co

†Departamento de Física, Universidad del Tolima, A. A. 546, Ibagué, Colombia. E-Mail: jhmunoz@ut.edu.co

‡Departamento de Economía y Finanzas, Universidad del Tolima, A. A. 546, Ibagué, Colombia. E-Mail: marodriguezm@ut.edu.co

Resumen

En este trabajo se estudian dos generalizaciones a las fichas del dominó *doble-6*. En forma general se considera el k-minó, $\mathcal{P}(k,n)$, el cual consiste en combinar de k en k los números del 0 al n. Con este enfoque y utilizando un procedimiento nuevo se encuentran patrones de recurrencia interesantes en función de los parámetros k y n para obtener el número de fichas y la suma de los puntajes de todas las fichas. En forma secuencial se estudia el dominó $\mathcal{P}(2,n)$ y el triminó $\mathcal{P}(3,n)$, para luego generalizar al $\mathcal{P}(k,n)$. Los resultados obtenidos se relacionan con el triángulo de Pascal y otros temas matemáticos como combinatorias, sucesiones y series de orden superior, matrices simétricas, tensores simétricos y grafos completos.

Palabras clave: dominó; triángulo de Pascal; sucesiones; series.

Abstract

In this work we study two generalizations to the *double-6* domino tiles. In a general way, it is considered the k-mino, $\mathcal{P}(k,n)$, which consists in combining the numbers from 0 to n in groups of k. With this approach and using a new procedure it is found interesting recurrence patterns in function of the k and n parameters in order to obtain the number of pieces and the sum of the score of all pieces of the mentioned game. In a sequential way it is studied the domino $\mathcal{P}(2,n)$ and the trimino $P(3,n)$ in order to generalize to $\mathcal{P}(k,n)$. The obtained results are related with the Pascal's triangle and another mathematical topics as combinatorial, numerical sequences and series of higher-order, symmetric matrices, symmetric tensors, and complete graphs.

Keywords: domino; Pascal's triangle; sequences; series.

Mathematics Subject Classification: 05A10, 11B25, 11C20.

1 Introducción

El dominó *doble-6* es un juego de mesa muy antiguo y popular, conformado por fichas rectangulares en las cuales se combinan de dos en dos los números del 0 al 6, que ofrece un escenario interesante en el campo académico. En la literatura se encuentra bibliografía, con diferentes enfoques o propósitos, sobre el dominó *doble-6*. Por ejemplo, ha sido estudiado como herramienta didáctica en la clase de matemáticas [18, 19, 20, 12, 16, 17, 23] planteando problemas que sirven para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. Otro escenario de interés es el estudio matemático de este juego [11, 8, 3, 13, 14, 9, 6, 1, 7] y su relación con otras áreas del conocimiento. Este trabajo está orientado en esta dirección.

Algunos autores han planteado generalizaciones al juego del dominó *doble-6*. En la referencia [21] se formula como actividad, pensar en otras formas para el dominó, como triangulares, cuadradas, pentagonales y hexagonales. A.M. Oller [13, 14] propuso considerar los números del 0 al n para combinarlos de dos en dos, obteniendo de esta manera el dominó *doble-*n. De igual forma, planteó la generalización del número de combinaciones de los números del 0 hasta el n, ubicándolos en una ficha rectangular formada por tres, cuatro, cinco,..., k cuadrados consecutivos. A estos juegos los llamó *triminó*, *tetraminó*, *pentaminó*,..., *k-minó*, respectivamente. También obtuvo una fórmula, sumando los números del 0 al n, para obtener el número de fichas del dominó *doble-*n y el triminó.

H. Lárez [9], usando la definición de multiconjuntos en vez de la Teoría Combinatoria, también obtuvo la fórmula para el número de fichas del dominó *doble-n* y una expresión para la suma de los puntajes de todas sus fichas. De igual manera obtiene la ecuación general para el número de fichas del *dominó de tres caras* (conformado por fichas que son triángulos equiláteros que contienen los números en sus vértices. Por lo tanto, este juego difiere del *triminó* mencionado por A. M. Oller). Se observa que en la referencia [9] no se presenta una fórmula para la suma de los puntajes de todas las fichas del dominó de tres caras. En este trabajo se obtiene esta fórmula. Por otra parte, J. González [6] también trabajó con un *dominó triangular* y obtuvo una expresión general para el número de fichas usando Teoría Combinatoria, asumiendo un orden rotativo en el sentido de las manecillas del reloj y considerando fichas simétricas y antisimétricas. De esta manera, el número de piezas se aumenta. R. Alba [1] también trabajó con el dominó triangular, obteniendo el número de fichas para el caso específico en el cual se ubican los números del 0 al 5 en los vértices de los triángulos, considerando también la rotación de los números en el sentido de las manecillas del reloj.

Motivados en los trabajos de A.M. Oller [13, 14] y H. Lárez [9], en este artículo se estudian nuevamente las dos generalizaciones mencionadas al dominó *doble-6*. La forma más general del juego, la cual también hemos llamado *k-minó*, se describe en términos de dos parámetros *k* y *n*, adoptando la notación $\mathcal{P}(k,n)$ para describir el juego en el cual se combinan, de *k* en *k*, los números del 0 al *n*. De esta manera, los dominós *doble-6* y *doble-n* se simbolizan por $\mathcal{P}(2,6)$ y $\mathcal{P}(2,n)$, respectivamente. La metodología utilizada permitió encontrar patrones de recurrencia en términos de estos dos parámetros. Es importante mencionar que el *k-minó* descrito en este trabajo difiere del planteado por A. M. Oller (el cual consiste en piezas rectangulares formadas por cuadrados consecutivos) y del *poliminó* propuesto hace varias décadas por S. Golomb [4] (consiste en combinar de diversas formas diferentes números de cuadrados).

En este trabajo se describe un procedimiento nuevo para contar, en forma general, las fichas del *k-minó* $\mathcal{P}(k,n)$ y para obtener la suma de los puntajes de todas sus fichas. De acuerdo a nuestro conocimiento, a la fecha solo está reportado en la referencia [9] la fórmula para obtener la suma de los puntajes de las fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$ (o *doble-n*). En este sentido, este artículo es una generalización a los trabajos previos de A. M. Oller [13, 14] y de H. Lárez [9]. A partir de la técnica de conteo empleada en las referencias [9, 6] se encontraron patrones de recurrencia y representaciones visuales, algebraicas y numéricas para el *k-minó*. Los resultados obtenidos se relacionan con los números naturales, triangulares, tetraédricos y pentatopos, los cuales se encuentran en el triángulo de Pascal, y con otros tópicos matemáticos como combinatorias, sucesiones, series y matrices simétricas. Adicionalmente, se ha establecido una correspondencia entre tensores totalmente simétricos y el *k-minó* $\mathcal{P}(k,n)$, y, entre el dominó $\mathcal{P}(2,n)$ y grafos completos y su matriz de adyacencia. Estas correspondencias tampoco han sido reportadas a la fecha.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se describe brevemente el triángulo de Pascal; en la 3 se hallan las expresiones para el número de fichas y la suma de los puntajes de las fichas para el dominó y el triminó; la generalización al k-minó se hace en la sección 4; en la sección 5 se describe la relación que hay entre tensores totalmente simétricos y el *k-minó*; en la sección 6 se discute la relación entre el dominó y los grafos completos y la respectiva matriz de adyacencia. Finalmente, las conclusiones se presentan en la sección 7.

2 Triángulo de Pascal

Como es de amplio conocimiento, el triángulo de Pascal corresponde a un arreglo simétrico de números (ver figura 1) donde cada fila inicia y termina con el número 1 y cada número interno se obtiene sumando los dos números que están arriba de él en la fila anterior. Algunas relaciones importantes que se encuentran en el triángulo de Pascal son las siguientes:

- Los números del triángulo de Pascal corresponden a los coeficientes binomiales $C_m^n = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, donde n es la fila y $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

- Cada fila del triángulo contiene los coeficientes del binomio $(x+y)^n$.

- La suma de los números de la n-ésima fila da 2^n.

- Dos números consecutivos en la misma fila están relacionados por
$$C_m^n = \left(\frac{n-m+1}{m}\right) C_{m-1}^n. \tag{1}$$

- Dos números ubicados en las filas $n-1$ y n, y, en las posiciones $m-1$ y m se relacionan por
$$C_m^n = \left(\frac{n}{m}\right) C_{m-1}^{n-1}. \tag{2}$$

- La suma de los primeros $k+1$ números de la n-ésima diagonal está dada por
$$\sum_{i=0}^{k} C_n^{n+i} = C_{n+1}^{n+k+1}. \tag{3}$$

A continuación se demostrará por inducción esta propiedad. En primer lugar, se mostrará que se cumple para $k=1$:

$$\begin{aligned} C_n^n + C_n^{n+1} &= 1 + \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n! + (n+1)!}{n!} = \frac{n!(n+2)}{n!}\left(\frac{n+1}{n+1}\right) \\ &= \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = C_{n+1}^{n+2}. \end{aligned}$$

En segundo lugar, se supone que la relación es cierta para un valor k y se demuestra para $k+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} C_n^{n+i} &= \left(C_n^n + C_n^{n+1} + \cdots + C_n^{n+k}\right) + C_n^{n+k+1} \\ &= C_{n+1}^{n+k+1} + C_n^{n+k+1} \quad \text{(por hipótesis)} \\ &= \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!k!} + \frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!} \\ &= \frac{(k+1)(n+k+1)! + (n+1)(n+k+1)!}{(n+1)!(k+1)!} \\ &= \frac{(k+n+2)(n+k+1)!}{(n+1)!(k+1)!} \\ &= \frac{(n+k+2)!}{(n+1)!(k+1)!} \\ &= C_{n+1}^{n+k+2}. \end{aligned}$$

De esta manera se ha demostrado la ecuación (3). ■

Las relaciones (1), (2) y (3) se utilizarán en la sección 4 para obtener, en forma general, las expresiones que dan el número de fichas y la suma de los puntajes de las fichas del $k-$minó.

Otra información importante y pertinente para nuestro análisis, también contenida en las diagonales del triángulo de Pascal se explica a continuación. Como se muestra en la figura 1, la segunda diagonal contiene la sucesión de los números *naturales* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, correspondientes a los coeficientes binomiales $\{C_1^n\}_{n\in N}$. La tercera presenta los números *triangulares* $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots\}$, representados por $\{C_2^{n+1}\}_{n\in N}$. En la cuarta diagonal se encuentran los números *tetraédricos* $\{1, 4, 10, 20, 35, 56, \dots\}$, dados por los coeficientes $\{C_3^{n+2}\}_{n\in N}$ y en la siguiente los números *pentatopos* $\{1, 5, 15, 35, 70, 126, \dots\}$, generados por $\{C_4^{n+3}\}_{n\in N}$. En la siguiente sección se mostrará que estas sucesiones aparecen en el juego del *k*-minó.

1												
1	**1**											
1	**2**	**1**										
1	**3**	**3**	**1**									
1	**4**	**6**	**4**	**1**								
1	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**							
1	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**						
1	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**					
1	**8**	**28**	**56**	**70**	**56**	**28**	**8**	**1**				
1	**9**	**36**	**84**	**126**	**126**	**84**	**36**	**9**	**1**			
1	**10**	**45**	**120**	**210**	**252**	**210**	**120**	**45**	**10**	**1**		
1	**11**	**55**	**165**	**330**	**462**	**462**	**330**	**165**	**55**	**11**	**1**	
1	**12**	**66**	**220**	**495**	**792**	**924**	**792**	**495**	**220**	**66**	**12**	**1**

Figura 1: Triángulo de Pascal.

3 Contando y sumando las fichas del dominó y del triminó

En esta sección se explica detalladamente la técnica que se utilizó para contar las fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$ y del triminó $\mathcal{P}(3,n)$, y, sumar los puntajes de todas sus fichas. Las expresiones que se obtienen para estas cantidades muestran regularidades que se pueden generalizar para el k-minó $\mathcal{P}(k,n)$.

3.1 Dominó $\mathcal{P}(2,n)$

Se tomará como punto de partida el dominó *doble-6*, el cual se simboliza como $\mathcal{P}(2,6)$, para luego generalizar al $\mathcal{P}(2,n)$. En el dominó $\mathcal{P}(2,6)$ se combinan, de dos en dos, los números desde el cero (mínimo) hasta el seis (máximo). Las fichas se simbolizarán por el par de números pq, donde $p \geq q$. Por ejemplo, la ficha que se muestra en la figura 2, se representa por 3 2. En la primera columna de la tabla 1, se muestran las fichas ordenadas, de tal manera que el primer número es mayor o igual al segundo.

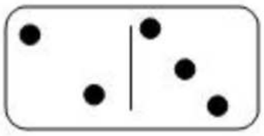


Figura 2: Ficha 3 2 del dominó.

Combinaciones	Número de fichas	Suma de puntajes
0 0	1	0
1 1 1 0	2	3
2 2 2 1 2 0	3	9
3 3 3 2 3 1 3 0	4	18
4 4 4 3 4 2 4 1 4 0	5	30
5 5 5 4 5 3 5 2 5 1 5 0	6	45
6 6 6 5 6 4 6 3 6 2 6 1 6 0	7	63
Totales	28	168

Tabla 1: Fichas del dominó $\mathcal{P}(2,6)$.

En la segunda columna de la tabla 1 se observa que el número de fichas del domino $\mathcal{P}(2,6)$ está dado por la suma de los números *naturales* desde 1 hasta 7: $1+2+3+4+5+6+7=28$. Esta sucesión de números naturales corresponde a la segunda diagonal del triángulo de Pascal, ver figura 1, y está determinada por la expresión

$$f_2(t) = t = C_1^t, \qquad t = 1, \dots, n+1. \tag{4}$$

En la tabla 2, se muestra el número de fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$ variando a $n \geq 1$. Se observa que el número de fichas está dado por la sucesión de los números *triangulares* $\{3, 6, 10, 15, \dots\}$, los cuales se encuentran en la tercera diagonal del triángulo de Pascal, ver figura 1. Generalizando, el número de fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$ es

$$\sum_{t=1}^{n+1} f_2(t) = \frac{1}{2!}(n+1)(n+2) = C_2^{n+2}. \tag{5}$$

En las referencias [13, 14] y [9] también se reporta la expresión del centro en la ecuación anterior.

Por otra parte, la suma de los coeficientes del polinomio que surge al expandir la ecuación (5) está dada por:

$$\frac{1}{2!}(1+3+2) = \frac{3!}{2!} = 3. \tag{6}$$

Obsérvese que este resultado es inmediato haciendo $n = 1$ en la ecuación (5).

Dominó	Número de fichas
$\mathcal{P}(2,2)$	6
$\mathcal{P}(2,3)$	10
$\mathcal{P}(2,4)$	15
$\mathcal{P}(2,5)$	21
$\mathcal{P}(2,6)$	28
$\mathcal{P}(2,7)$	36
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{P}(2,n)$	C_2^{n+2}

Tabla 2: Número de fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$.

Ahora se describirá cómo obtener, en forma general, la suma de los puntajes de todas las fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$. Para ello, se parte nuevamente del dominó $\mathcal{P}(2,6)$. En la tercera columna de la tabla 1 se muestra que la suma total de los puntajes de todas las fichas del dominó $\mathcal{P}(2,6)$ es 168 (obsérvese que esta cantidad es el producto de 6×28, es decir, el producto del valor de n por el número de fichas. En [9] se llega al mismo resultado). Esta cantidad se obtiene sumando la sucesión de números $\{0,3,9,18,30,45,63\}$. Dicha sucesión aritmética es de segundo orden. En efecto, realizando hasta la segunda diferencia se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 3 & & 9 & & 18 \\ & 3 & & 6 & & 9 & \\ & & 3 & & 3. & & \end{array}$$

Asociándole un polinomio de segundo orden se encuentra que la sucesión está dada por la expresión

$$g_2(t) = \frac{3}{2}(t-1)t = 3C_2^t, \qquad t = 2,\ldots,n+1. \tag{7}$$

No es necesario considerar $t=0$ ya que $g_2(0)=0$. La serie que da la suma de los puntajes de todas las fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$ es

$$\sum_{t=1}^{n+1} g_2(t) = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2) = nC_2^{n+2}. \tag{8}$$

En la referencia [9] se obtiene el resultado presentado en la ecuación (8) sin relacionarlo con el coeficiente binomial C_2^{n+2}.

Para terminar esta subsección, se mencionará que el arreglo de números que se muestra en la primera columna de la tabla 1, se puede asociar con la configuración de una matriz simétrica, ver tabla 3: cada combinación corresponde a una entrada de la matriz. Por lo tanto, el número de fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$ corresponde al número de componentes independientes de la matriz simétrica de orden $(n+1)\times(n+1)$, el cual es C_2^{n+2}.

$$\begin{pmatrix} 0\,0 & 0\,1 & 0\,2 & \ldots & 0\,n \\ 1\,0 & 1\,1 & 1\,2 & \ldots & 1\,n \\ 2\,0 & 2\,1 & 2\,2 & \ldots & 2\,n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\,0 & n\,1 & n\,2 & \ldots & n\,n \end{pmatrix}$$

Tabla 3: Arreglo matricial asociado a las fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$.

3.2 Triminó $\mathcal{P}(3,n)$

En este caso se considera como punto de partida el triminó $\mathcal{P}(3,6)$ para luego generalizar al $\mathcal{P}(3,n)$. En el triminó $\mathcal{P}(3,6)$ se combinan, de tres en tres, los números desde el cero (mínimo) hasta el seis (máximo), ubicándolos en los vértices de un triángulo equilátero.

Combinaciones	Número de fichas	Suma de puntajes
000	1	0
111 100		
110	3	6
222 211 200		
221 210		
220	6	24
333 322 311 300		
332 321 310		
331 320		
330	10	60
444 433 422 411 400		
443 432 421 410		
442 431 420		
441 430		
440	15	120
555 544 533 522 511 500		
554 543 532 521 510		
553 542 531 520		
552 541 530		
551 540		
550	21	210
666 655 644 633 622 611 600		
665 654 643 632 621 610		
664 653 642 631 620		
663 652 641 630		
662 651 640		
661 650		
660	28	336
Totales	84	756

Tabla 4: Fichas del triminó $\mathcal{P}(3,6)$.

En la primera columna de la tabla 4 se muestran todas las fichas del triminó $\mathcal{P}(3,6)$ (un arreglo similar se encuentra en las referencias [9, 6]. De igual modo, en la referencia [6] se presenta la misma distribución de fichas para $\mathcal{P}(3,5)$). Cada ficha se representa por tres números pqr ordenados con la condición $p \geq q \geq r$. En la segunda columna de la tabla 4 se muestra el número de combinaciones posibles en cada caso (dejando fijo a p). El número de fichas del triminó $\mathcal{P}(3,6)$ es 84 (esta cantidad también se obtiene en [9]).

Se observa que los números que aparecen en esta columna $\{1,3,6,10,15,21,28\}$ son, precisamente, los números *triangulares*, dados por la sucesión

$$f_3(t) = \frac{1}{2}t(t+1) = C_2^{t+1}, \qquad t = 1,\dots,n+1. \tag{9}$$

En la tabla 5, se muestra el número de fichas del triminó $\mathcal{P}(3,n)$ variando a n. Se puede ver que el número de fichas está dado por la sucesión de los números *tetraédricos* $\{10,20,35,56,\dots\}$ los cuales se encuentran en la cuarta diagonal del triángulo de Pascal, ver figura 1.

Triminó	Número de fichas
$\mathcal{P}(3,3)$	20
$\mathcal{P}(3,4)$	35
$\mathcal{P}(3,5)$	56
$\mathcal{P}(3,6)$	84
$\mathcal{P}(3,7)$	120
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{P}(3,n)$	C_3^{n+3}

Tabla 5: Número de fichas del triminó $\mathcal{P}(3,n)$.

Generalizando, la serie de esta sucesión da el número de fichas del triminó $\mathcal{P}(3,n)$:

$$\sum_{t=1}^{n+1} f_3(t) = \frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3) = C_3^{n+3}. \tag{10}$$

Esta ecuación difiere en el denominador de la expresión dada en la referencia [9]. De igual forma, las referencias [6] y [1] también presentan resultados diferentes porque en estos trabajos consideraron simetrías y asimetrías en las fichas y la orientación de los números en las fichas.

También se encuentra que la suma de los coeficientes del polinomio que surge al expandir la ecuación (10) está dada por:

$$\frac{1}{3!}\left(1+6+11+6\right)=\frac{4!}{3!}=4. \tag{11}$$

Nuevamente se observa que este resultado es inmediato haciendo $n=1$ en la ecuación (7).

A continuación, se describirá cómo obtener la suma de los puntajes de todas las fichas del triminó $\mathcal{P}(3,n)$. Inicialmente se obtendrá esta suma para el triminó $\mathcal{P}(3,6)$. En la tercera columna de la tabla 4 se muestra que la suma de los puntajes de todas las fichas es 756. Esta cantidad se obtiene sumando los puntajes de cada combinación, dejando fijo al primer número, los cuales están dados por la sucesión $\{0,6,24,60,120,210,336\}$. Esta sucesión es de tercer orden. En efecto, desarrollando hasta la tercera diferencia sucesiva se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 6 & & 24 & & 60 & & 120 \\
& 6 & & 18 & & 36 & & 60 & \\
& & 12 & & 18 & & 24 & & \\
& & & 6 & & 6. & & &
\end{array}$$

Por lo tanto, se le puede asociar un polinomio de tercer orden. En este caso la sucesión está determinada por la expresión

$$g_3(t)=(t-1)t(t+1)=6C_3^{t+1}, \qquad t=2,\ldots,n+1, \tag{12}$$

y la suma de los puntajes de todas las fichas del triminó $\mathcal{P}(3,n)$ está dada por la serie

$$\sum_{t=1}^{n+1} g_3(t)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{3}{2}n\,C_3^{n+3}. \tag{13}$$

De esta manera se obtiene que el puntaje de todas las fichas del triminó $\mathcal{P}(3,n)$ es 1.5 veces el producto entre el número máximo (n) y el número de fichas (C_3^{n+3}). Este resultado no ha sido reportado previamente en la literatura.

4 Generalización

En esta sección se generalizarán los resultados obtenidos, en la sección anterior, para el dominó $\mathcal{P}(2,n)$ y el triminó $\mathcal{P}(3,n)$. Se obtendrán las expresiones que dan el número de fichas y la suma de los puntajes de todas las fichas del k-minó $\mathcal{P}(k,n)$. Al final de la sección se presenta una aplicación en probabilidades con el objetivo de explicar la importancia de estas generalizaciones.

El k-minó $\mathcal{P}(k,n)$, en el cual se combinan, en grupos de k elementos, los números del 0 al n, es un conjunto definido mediante dos parámetros, uno de forma (k) y otro de escala (n), que se construye de la siguiente manera

$$\mathcal{P}(k,n) = \{(a_1,\dots,a_k) : a_i \in \{0,1,\dots,n\} \quad \text{y} \quad a_1 \geq \cdots \geq a_k\}\,. \tag{14}$$

Como se mostró en la sección anterior, la sucesión que da las sumas parciales de las fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$ es $f_2(t) = C_1^t$ (ver ecuación (4)) correspondiendo a la segunda diagonal del triángulo de Pascal la cual contiene los números naturales. La diagonal siguiente en este triángulo, conformada por la sucesión $f_3(t) = C_2^{t+1}$ (ver ecuación (9)) da las sumas parciales de las fichas del triminó $\mathcal{P}(3,n)$. A partir de esta observación se espera que las sumas parciales de las fichas del tetraminó $\mathcal{P}(4,n)$, del pentaminó $\mathcal{P}(5,n)$, etc., estén dadas por las siguientes diagonales del triángulo de Pascal, conformadas por las sucesiones C_3^{t+2} (números tetraédricos), C_4^{t+3} (números pentatopos), etc. Continuando con esta secuencia, se propone que la sucesión C_1^t, C_2^{t+1}, C_3^{t+2}, $C_4^{t+3},\dots$ está dada por la relación de recurrencia

$$f_k(t) = \left(\frac{t+k-2}{k-1}\right) f_{k-1}(t), \qquad k = 2,\dots \tag{15}$$

tomando como función semilla a $f_2(t) = C_1^t$. De esta manera se propone como solución

$$f_k(t) = \frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=0}^{k-2}(t+i) = C_{k-1}^{t+k-2}, \qquad t = 1,\dots,n+1. \tag{16}$$

Esta expresión se demostrará sustituyendo esta hipótesis en la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned}
f_k(t) &= \left(\frac{t+k-2}{k-1}\right) f_{k-1} \\
&= \left(\frac{t+k-2}{k-1}\right) C_{(k-1)-1}^{t+(k-1)-2} && \text{(usando la hipótesis)} \\
&= \left(\frac{t+k-2}{k-1}\right) C_{k-2}^{t+k-3} \\
&= \left(\frac{t+k-2}{k-1}\right) \left[\frac{k-1}{t+k-2} C_{k-1}^{t+k-2}\right] && \text{(usando la propiedad (2))} \\
f_k &= C_{k-1}^{t+k-2}.
\end{aligned}$$

Quedando así demostrada la ecuación (16), la cual da las sumas parciales de fichas del k-minó $\mathcal{P}(k,n)$. ■

A partir de las ecuaciones (5) y (10), obtenidas en la sección anterior, para el total de fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$ y del triminó $\mathcal{P}(3,n)$, respectivamente, se propone que el número de fichas del k-minó $\mathcal{P}(k,n)$ está determinado por la expresión:

$$\sum_{t=1}^{n+1} f_k(t) = C_k^{n+k}. \tag{17}$$

La demostración de esta ecuación se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n+1} f_k(t) &= \sum_{t=1}^{n+1} C_{k-1}^{t+k-2} && \text{(por ecuación (16))}\\ &= C_{k-1}^{k-1} + C_{k-1}^{k} + \cdots + C_{k-1}^{n+k-1}\\ &= C_k^{n+k}. && \text{(por ecuación (3))}\end{aligned}$$

Por otra parte, la suma de los coeficientes del polinomio en función de n y de grado k que surge al expandir la ecuación (17) corresponde a la generalización de las ecuaciones (6) y (11), la cual está dada por:

$$\frac{1}{k!}\left(1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + k!\right) = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1. \tag{18}$$

A este resultado se llega fácilmente haciendo $n = 1$ en la ecuación (17) ya que se obtiene C_k^{k+1}.

En cuanto a las sumas parciales de los puntajes de las fichas del k-minó se presenta el siguiente análisis: se observa inicialmente que para el dominó $\mathcal{P}(2,n)$ y el triminó $\mathcal{P}(3,n)$ la sumas parciales de los puntajes de sus fichas están dadas por $g_2(t) = 3C_2^t$ y $g_3(t) = 6C_3^{t+1}$, según las ecuaciones (7) y (12), respectivamente. Los coeficientes de estas dos expresiones son números triangulares y sus coeficientes binomiales presentan una tendencia.

Se propone que la sucesión $3C_2^t,\ 6C_3^{t+1}, \ldots$ es generada por la relación de recurrencia

$$g_k = \frac{k+1}{k(k-1)}(t+k-2)g_{k-1}, \tag{19}$$

tomando como función semilla a $g_2(t)$. Se plantea como hipótesis que la función $g_k(t)$ que da las sumas parciales de los puntajes de las fichas del k-minó $\mathcal{P}(k,n)$ es:

$$g_k(t) = \frac{k+1}{2(k-1)!}\prod_{i=-1}^{k-2}(t+i) = \frac{k(k+1)}{2}C_k^{t+k-2} \qquad t = 2, \ldots, n+1, \tag{20}$$

donde se ha excluido $t = 1$ porque $g_k(1) = 0$. Para demostrar esta expresión se sustituye la hipótesis en la ecuación de recurrencia:

$$\begin{aligned}
g_k &= \frac{k+1}{k(k-1)}(t+k-2)g_{k-1} \\
&= \frac{k+1}{k(k-1)}(t+k-2)\left[\frac{(k-1)[(k-1)+1]}{2}C_{k-1}^{t+(k-1)-2}\right] \\
&= \frac{k+1}{2}(t+k-2)C_{k-1}^{t+k-3} \\
&= \frac{k+1}{2}(t+k-2)\left[\frac{k}{(t+k-2)}C_k^{t+k-2}\right] && \text{(usando la propiedad (2))} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}C_k^{t+k-2}.
\end{aligned}$$

De esta manera queda demostrada la ecuación (20). ■

La expresión que da la suma de los puntajes de todas las fichas del k-minó $\mathcal{P}(k,n)$, correspondiente a la serie de la sucesión $\{g_k(t)\}$, se obtiene a partir de la generalización de las ecuaciones (8) y (13). A partir de ellas, se propone

$$\sum_{t=2}^{n+1} g_k(t) = \frac{k}{2}nC_k^{n+k}. \tag{21}$$

Para demostrar esta expresión se procede de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=2}^{n+1} g_k(t) &= \sum_{t=2}^{n+1} \frac{k(k+1)}{2}C_k^{t+k-2} && \text{(usando la ecuación (20))} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}\left(C_k^k + C_k^{k+1} + \cdots + C_k^{n+k-1}\right) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}C_{k+1}^{n+k} && \text{(por propiedad (3))} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}\left[\left(\frac{n}{k+1}\right)C_k^{n+k}\right] && \text{(por propiedad (1))} \\
\sum_{t=2}^{n+1} g_k(t) &= \frac{k}{2}nC_k^{n+k}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, se ha demostrado la ecuación (21). ■

De las ecuaciones (16) y (20) se obtiene una relación entre $f_k(t)$ y $g_k(t)$:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{k(k+1)}{2} C_k^{t+k-2} \\ &= \frac{k(k+1)}{2}\left[\frac{(t-1)}{k} C_{k-1}^{t+k-2}\right] && \text{(usando la propiedad (1))} \\ g_k &= \frac{(k+1)}{2}(t-1) f_k. \end{aligned}$$

Para terminar esta sección, se explicará una aplicación en probabilidades que da evidencia de la importancia de llegar a estas generalizaciones. Para ello, se considerará el siguiente experimento relacionado con el $k-$minó $\mathcal{P}(k,n)$: construir $k-$uplas ordenadas $(a_1,\ldots,a_k)$ con la condición $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$. A este experimento se le puede asignar la variable aleatoria discreta número de k-uplas con un valor específico de a_1 (el cual va desde 0 hasta n) para encontrar la probabilidad de obtener este número de k-uplas.

Con el objetivo de ser más específicos, se realizará el experimento mencionado asociándolo al dominó $\mathcal{P}(2,6)$ y al triminó $\mathcal{P}(3,6)$. A partir de los valores reportados en la segunda columna de las tablas 1 y 4, se obtienen las probabilidades asociadas al número de k-uplas para un a_1 determinado. En la figura 3 se presenta la función de densidad para el dominó $\mathcal{P}(2,6)$ (columnas claras) y para el triminó $\mathcal{P}(3,6)$ (columnas oscuras). Se obtiene que el comportamiento de la densidad de probabilidad para la variable aleatoria conteo de k-uplas es lineal para el dominó $\mathcal{P}(2,6)$, mientras que para el triminó $\mathcal{P}(3,6)$ es cuadrático.

5 El *k*-minó y tensores totalmente simétricos

En esta sección se mencionará, brevemente, la relación entre tensores totalmente simétricos y el número de fichas del k-minó.

En coordenadas cartesianas, un tensor de rango r es una estructura matemática $T_{ijk\ldots r}$, cuyas componentes transforman de la siguiente manera [2]:

$$T'_{ijk\ldots} = A_{im}A_{jn}A_{kp}\cdots T_{mnp\ldots},$$

donde están implícitas sumas entre índices repetidos en el lado derecho de la ecuación y $A_{im} = \partial x'_i/\partial x_m$.

Un tensor $T_{ijk\ldots r}$ es totalmente simétrico cuando al permutar cualquier par de índices se obtiene la misma componente. En física son muy importantes los tensores y es útil determinar si el tensor es simétrico.

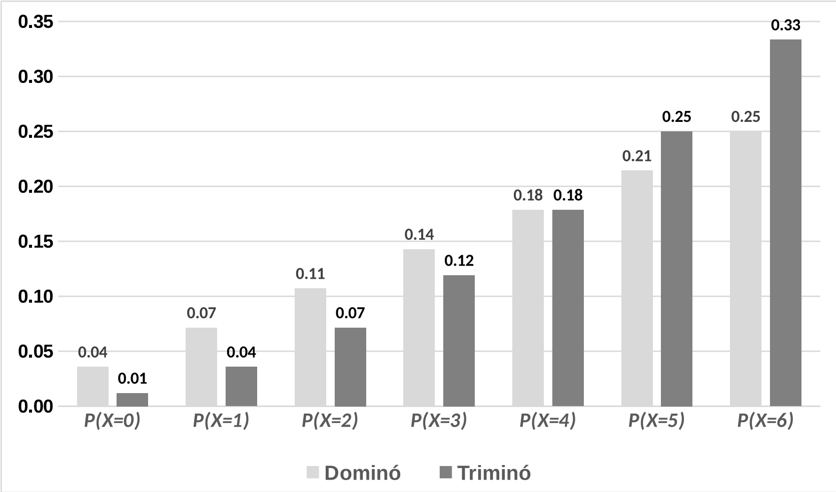


Figura 3: Función de densidad del número de k-uplas con a_1 variando desde 0 hasta 6 asociada al dominó $\mathcal{P}(2,6)$ y al triminó $\mathcal{P}(3,6)$.

El número de componentes independientes de un tensor totalmente simétrico de rango k en $n+1$ dimensiones está relacionado con el número de fichas del juego del k-minó $\mathcal{P}(k,n)$. A continuación se detalla esta relación:

- Consideremos un tensor de segundo rango simétrico, esto es, $T_{ij} = T_{ji}$. El número de componentes independientes de un tensor simétrico de segundo rango en dos dimensiones es 3, en tres dimensiones es 6 y en cuatro dimensiones es 10. Es decir, es igual al número de fichas de los dominós $\mathcal{P}(2,1)$, $\mathcal{P}(2,2)$ y $\mathcal{P}(2,3)$, respectivamente.

- Si el tensor es de tercer rango y totalmente simétrico ($T_{pqr} = T_{qpr} = T_{prq} = T_{rqp}$), en tres dimensiones tiene 10 componentes independientes y en cuatro dimensiones tiene 20. Estas cantidades son iguales al número de fichas de los triminós $\mathcal{P}(3,2)$ y $\mathcal{P}(3,3)$, respectivamente.

- Un tensor de rango cuatro, totalmente simétrico, en cuatro dimensiones, tiene 35 componentes independientes. Este es precisamente el número de fichas del tetraminó $\mathcal{P}(4,3)$.

En general, el número de fichas del k-minó $\mathcal{P}(k,n)$ es igual al número de componentes independientes de un tensor de rango k, totalmente simétrico, en $n+1$ dimensiones.

A continuación se explicará la relación entre el dominó $\mathcal{P}(2,2)$ y dos tensores simétricos de rango 2 ($= k$) y tri-dimensionales ($= n+1 = 3$) que se utilizan en física, especialmente, en mecánica clásica:

- *Delta de Kronecker* δ_{ij}: es un tensor de segundo rango, simétrico, definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j, \end{cases}$$

  donde $i, j = 1, 2, 3$. La representación matricial de este tensor coincide con la matriz Identidad 3×3. Tiene seis componentes independientes igual que el número de fichas del dominó $\mathcal{P}(2,2)$. De acuerdo a la tabla 3, las componentes δ_{11}, δ_{22} y δ_{33}, iguales a 1, se corresponden con las fichas $0\ 0, 1\ 1$ y $2\ 2$ del dominó $\mathcal{P}(2,2)$, respectivamente. Y las componentes δ_{12}, δ_{13} y δ_{23}, iguales a 0, se relacionan con las fichas $1\ 0, 2\ 0$ y $2\ 1$, respectivamente.

- *Tensor de inercia*: para un sistema conformado por N partículas, el tensor de inercia se define por [22]

$$\mathbb{I}_{jk} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\delta_{jk} \sum_{i=1}^{3} x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,j} x_{\alpha,k} \right), \tag{22}$$

  donde m_α es la masa de la α-ésima partícula, $x_{\alpha,j}$ es la j-ésima componente del vector posición de la α-ésima partícula, δ_{jk} es el Delta de Kronecker y $j,\ k = 1, 2, 3$. La expresión para el tensor de inercia es simétrica ya que $\mathbb{I}_{jk} = \mathbb{I}_{kj}$. Por lo tanto, tiene 6 componentes independientes, igual que el número de fichas del dominó $\mathcal{P}(2,2)$.

  Las componentes $\mathbb{I}_{11},\ \mathbb{I}_{22}$ e $\mathbb{I}_{33}$ corresponden a las fichas 0 0, 1 1 y 2 2, respectivamente, mientras que las componentes $\mathbb{I}_{12}$, $\mathbb{I}_{13}$ e $\mathbb{I}_{23}$ se asocian a las fichas 1 0, 2 0 y 2 1, respectivamente.

También se puede relacionar el dominó $\mathcal{P}(2,3)$ con el *tensor métrico* de un espacio euclideo de 4 dimensiones, $g_{\mu\nu}$, donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Este tensor de rango $2 (= k)$, es simétrico y de bastante utilidad en física, especialmente en relatividad especial. Su representación matricial está dada por la matriz diagonal $dg = (1, -1, -1, -1)$. El número de fichas del dominó $\mathcal{P}(2,3)$ es 10, igual que el número de componentes independientes del tensor métrico. Las componentes de la diagonal g_{00}, g_{11}, g_{22} y g_{33} se relacionan con las fichas 0 0, 1 1, 2 2 y 3 3, respectivamente. Las componentes g_{10}, g_{20}, g_{30}, g_{12}, g_{13} y g_{23}, iguales a 0, se asocian a las fichas 1 0, 2 0, 3 0, 2 1, 3 1 y 3 2, respectivamente.

6 Las fichas del dominó y grafos

En esta sección se discutirá brevemente la relación que existe entre cierto tipo de grafos, matrices y las fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$ [12, 13, 14, 15].

Un grafo G es una dupla (X,U), donde X es un conjunto finito y no vacío de elementos llamados vértices y U es el conjunto cuyos elementos se componen de subconjuntos de X de cardinalidad dos, llamados aristas. Todo grafo se puede representar por un diagrama y por diversos tipos de matrices (ver por ejemplo [5, 10]).

En este trabajo sólo se considerarán grafos *simples* (sin multiaristas y sin lazos). Dentro de este grupo se tendrán en cuenta sólo los grafos *completos*, los cuales corresponden a grafos *regulares* (todos sus vértices tienen el mismo grado), con N vértices de grado $N-1$ cada uno de ellos. En estos grafos cada par de vértices está conectado por una arista y el número de aristas está dado por el coeficiente binomial $C_2^N = \dfrac{N(N-1)}{2}$.

Por otra parte, al revisar los tipos de matrices mediante las cuales se representan los grafos, entre ellas, de incidencia, de adyacencia o de Laplace [10], se encontró que para el objetivo de este trabajo es pertinente considerar la matriz de adyacencia (A), en la cual, la arista entre dos vértices se representa por 1 y la ausencia de arista entre dos vértices, por 0, es decir,

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay arista entre los vértices } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{si no hay arista entre los vértices } i \text{ y } j, \end{cases}$$

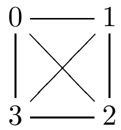
Esta matriz es binaria, simétrica, real y de traza 0.
Para el caso de un grafo *completo* de N vértices la matriz de adyacencia está dada por

$$A_{N\text{x}N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que el número de elementos de A por debajo de la diagonal es C_2^N.

Ahora se explicará la relación entre el dominó $\mathcal{P}(2,n)$ sin las fichas que tengan números iguales y los grafos *completos* y su respectiva matriz de adyacencia. En efecto, podemos asociar los números del 0 al n del dominó con los vértices del grafo (es decir, el grafo tendría $N = n+1$ vértices) y cada una de las fichas con las aristas del grafo y con las entradas no nulas ($=1$) de la matriz de adyacencia. Si no se consideran las fichas que tienen números iguales cada número (del 0 al n) aparece n veces en las fichas siendo este el grado de cada vértice del grafo. El hecho de no considerar fichas con números iguales se corresponde con la ausencia de lazos en el grafo y con los elementos nulos en la diagonal de la matriz de adyacencia. Como $N = n + 1$, el número de aristas en el grafo *completo*, igual al número de elementos por debajo de la diagonal en la matriz de adyacencia e igual al número de fichas en el dominó (excluyendo fichas con números iguales) está dado por: $C_2^N = C_2^{n+1}$. Por lo tanto, los grafos *completos* y su respectiva matriz de adyacencia se pueden asociar con todas las fichas del dominó $\mathcal{P}(2, n)$, sin considerar las fichas con números iguales.

Para ilustrar esta relación, se considerará el dominó $\mathcal{P}(2, 3)$ sin incluir las fichas con igual número. En este caso, se tienen seis fichas $\{1\,0, 2\,0, 2\,1, 3\,0, 3\,1, 3\,2\}$. El grafo *completo* asociado a este dominó se muestra en el siguiente diagrama:



Los números 0, 1, 2, y 3 representan los cuatro ($N = n + 1 = 4$) vértices del grafo y las fichas las seis aristas. El grado de cada vértice es 3 ($= n$), igual a las veces que aparece cada número (del 0 al 3) en las fichas. La matriz de adyacencia 4×4 asociada a este grafo es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El número de elementos por debajo de la diagonal es $C_2^{3+1} = 6$. Este número es igual al de fichas del dominó $\mathcal{P}(2, 3)$ omitiendo las fichas con igual número. Obsérvese que la suma de las componentes de cualquier fila (o cualquier columna) de esta matriz da el grado de cada vértice. Esta es una propiedad de la matriz de adyacencia [10].

Para terminar esta sección, en la tabla 6 se muestran algunas propiedades de la matriz de adyacencia A de dimensiones $(n + 1)$x$(n + 1)$ asociada al grafo completo de $n + 1$ vértices y C_2^{n+1} aristas, relacionado con el dominó $\mathcal{P}(2, n)$ (excluyendo las fichas con igual número). En la segunda columna se presenta el polinomio característico; en la tercera se relacionan las raíces de este polinomio; y en la última, se muestra el determinante. Se observa que estas propiedades presentan patrones de recurrencia en función del número n.

Por ejemplo, el determinante es $(-1)^n n$ y el autovalor más grande es n, lo que hace que los demás autovalores sean n veces -1 para que la traza de la matriz sea invariante $(= 0)$.

Dominó	Polinomio característico	Raíces	Determinante
$\mathcal{P}(2,1)$	$(x-1)(x+1)$	$1,-1$	-1
$\mathcal{P}(2,2)$	$-(x-2)(x+1)^2$	$2,-1,-1$	2
$\mathcal{P}(2,3)$	$(x-3)(x+1)^3$	$3,-1,-1,-1$	-3
$\mathcal{P}(2,4)$	$-(x-4)(x+1)^4$	$4,-1,-1,-1,-1$	4
$\mathcal{P}(2,5)$	$(x-5)(x+1)^5$	$5,-1,-1,-1,-1,-1$	-5
$\mathcal{P}(2,6)$	$-(x-6)(x+1)^6$	$6,-1,-1,-1,-1,-1,-1$	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{P}(2,n)$	$(-1)^{n+1}(x-n)(x+1)^n$	$n,-1,\ldots,-1$	$(-1)^n\, n$

Tabla 6: Polinomio característico, autovalores y determinante de la matriz A.

7 Conclusiones

En este trabajo se revisaron dos generalizaciones a las fichas del dominó *doble-6*. A través de un procedimiento nuevo se han obtenido expresiones, en forma general, para el número de fichas y para la suma de los puntajes de todas las fichas para el juego del k-minó $\mathcal{P}(k,n)$. De acuerdo a nuestro conocimiento, a la fecha no está reportado en la literatura un resultado similar para el número de fichas de este juego a partir de $k = 4$, ni para la suma de los puntajes de las fichas a partir de $k = 3$. Únicamente la referencia [9] presenta una fórmula para la suma de los puntos de las piezas para el caso específico del dominó $\mathcal{P}(2,n)$.

Inicialmente se consideró el dominó $\mathcal{P}(2,n)$ y luego el triminó $\mathcal{P}(3,n)$, para obtener, posteriormente, las expresiones generales asociadas al k-minó $\mathcal{P}(k,n)$. Además se encontró una relación entre el número de fichas del *k-minó* y las componentes independientes de un tensor totalmente simétrico. También se discutió la relación entre las fichas del dominó $\mathcal{P}(2,n)$, sin considerar las fichas con igual número, y el grafo completo de $n+1$ vértices de grado $n-1$ y la respectiva matriz de adyacencia. Los resultados obtenidos presentan patrones de recurrencia en función de los paramétros k y n.

La técnica de conteo utilizada para hallar el número de fichas permite obtener sucesiones que coinciden con los números naturales, triangulares, tetraédricos y pentatopos, los cuales se encuentran en las diagonales del triángulo de Pascal.

Por lo tanto, los resultados obtenidos se pueden expresar en términos de coeficientes binomiales o combinatorias.

Para obtener los resultados presentados en este trabajo fue necesario aplicar varios conceptos matemáticos asociados a combinatorias, sucesiones y series de orden superior, matrices simétricas, tensores simétricos, grafos, determinantes y autovalores de una matriz. Este trabajo es una contribución adicional a la matematización del juego del dominó.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad del Tolima por la financiación para desarrollar la presente investigación. También agradecen a los evaluadores por sus invaluables observaciones; el manuscrito se mejoró significativamente con la incorporación de sus comentarios.

Referencias

[1] Alba, R. (2008) “Problema 1: dominó/dominó triangular”, en: `www.matesymas.es/problema-1-dominodomino-triangular/`, consultado el 15/07/2017, 9:00 a.m.

[2] Arfken, G.B.; Weber, H.J. (1995) *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, San Diego, California.

[3] Fernández, L. (1987) *El Dominó, aspectos matemáticos*. Algol, S.A., Santa Cruz de Tenerife.

[4] Golomb, S.W. (1994) *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings*. Princeton University Press, New Jersey.

[5] González, F.J. (2004) “Grafos”, in: F.J. González (Ed.) *Apuntes de Matemática Discreta*”, Universidad de Cádiz, Cádiz: 395–463, en: `http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1711003/Apuntes/Leccion14.pdf`, consultado el 22/07/2017, 9:00 a.m.

[6] González, J. (2009) “Dominó triangular”, en: `http://www.matesymas.es/wp-content/uploads/2009/03/domino$_-$triangular2.pdf`, consultado el 15/07/2017, 7:00 a.m.

[7] Graham, R.L.; Knuth, D.E.; Patashnik, O. (1990) *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

[8] Hans, J.A.; Muñoz, J.; Fernández, A. (Grupo Alquerque de Sevilla) (2012) "Operaciones con las fichas del dominó", *Revista SUMA* **70**: 77–84.

[9] Lárez, H. (2009) "Fórmula de conteo para un dominó de tres caras", *Revista Notas de Matemática* **5**(2): 35–41.

[10] Maia de Abreu, N.M.; Del-Vecchio, R.R; Tavares Maia, C.; Stevanović, D. (2007) "Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações", in: E. Andrade; R. Sampaio & G. Silva (Eds.) *Notas em Matemática Aplicada Vol. 27*, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Brasil: 13–95, en: `http://www.sbmac.org.br/boletim/arquivos2007/volume27.pdf`, consultado el 10/07/2018.

[11] Maldonado, J.A. (2011) "Matemáticas aplicadas al juego del dominó", en: `http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eure-uaq/n11/en1106.pdf`, consultado el 13/11/2017, 9:00a.m.

[12] Morales, J.M.; Muñoz, J.M.; Oller, A.M. (2009) "Empleo didáctico de juegos que se materializan mediante grafos: una experiencia", *Contextos Educativos* **12**: 137–164.

[13] Oller, A.M. (2005) "Jugando con el dominó", en `https://www.unizar.es/ttm/2005-06/domino.pdf`, consultado el 12/07/2017, 8:00 a.m.

[14] Oller, A. M. (2006) "Jugando con el dominó: taller de talento matemático, 4to. E.S.O.", en: `https://www.unizar.es/ttm/2005-06/presentaciondomino.pdf`, consultado el 12/07/2017, 9:00 a.m.

[15] Oller, A. M. (2008) "Jugando con el dominó: taller de talento matemático, 3ro. E.S.O.", en: `https://www.unizar.es/ttm/2007-08/domino.pdf`, consultado el 22/07/2017, 8:00 a.m.

[16] Oller, A.M.; Muñoz, J.M. (2006) "Euler jugando al dominó", *Revista SUMA* **53**: 39–49.

[17] Recreomath (s.f.) `http://recreomath.qc.ca/dict-triangulaire-domino.htm`, consultado el 01/02/2018, 10:00 a.m.

[18] Rupérez, J.A.; García, M. (2017) "Dominó, dominó, dominique", *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas* **94**: 123–131.

[19] Rupérez, J.A.; García, M. (2017) "También tenemos las del dominó", *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas* **95**: 137–152.

[20] Rupérez, J.A.; García, M. (2017) "Dominós orientales y otras variantes didácticas", *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas* **96**: 119–133.

[21] Tapson, F. (2004) "Dominoes", en: `http://www.cleavebooks.co.uk/trol/trolxe.pdf`, consultado el 13/11/2017, 3:00 p.m.

[22] Thornton S.T. and Marion J.B. (2003) *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson Brooks/Cole, Belmont.

[23] Torres, D. (2016) "El dominó como herramienta de enseñanza para favorecer el razonamiento matemático en el jardín de niños", in A. Barraza & T. Cárdenas (Eds.) *Proyectos de innovación didáctica en, y desde, los diferentes niveles educativos*, Instituto Universitario Anglo Español, México: 33–51.