© Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2020 **27**(2) : 289–303
cimpa – ucr issn: 1409-2433 (Print), 2215-3373 (Online)
doi: https://doi.org/10.15517/rmta.v27i2.37284

UN PRODUCTO EN EL ÁLGEBRA DE CLIFFORD $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$ Y SUS APLICACIONES

A PRODUCT IN THE CLIFFORD ALGEBRA $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$ AND IT'S APPLICACTIONS

Yanett Bolívar[*] María Cortez[†]

Received: 31/Jul/2019; Revised: 27/Jan/2020;
Accepted: 6/Feb/2020

[*]Universidad de Oriente, Departamento de Matemática, Cumaná, Venezuela. E-Mail: bolivarcolon@gmail.com
[†]Institución de Educación Privada Kids in Action, Trujillo, Perú. E-Mail: mjcb211093@gmail.com

Resumen

Las álgebras de Clifford son álgebras asociativas y no conmutativas definidas a través de ciertas estructuras multiplicativas. En estas álgebras no siempre existe una fórmula explícita que permita expresar el producto entre los vectores de la base del espacio vectorial, tal como está propuesto en el álgebra $\mathcal{A}_n$ (ver [6]). En esta investigación se ofrece una expresión explícita para el producto de determinados elementos de la base del álgebra $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$, lo cual representa la apertura para deducir cálculos que arrojen nuevos aportes en el análisis de Clifford con parámetros.

Palabras clave: álgebra de Clifford; producto de vectores; fórmula de Leibniz.

Abstract

Clifford algebras are associative and non-commutative algebras defined through certain multiplicative structures. In these algebras there is not always an explicit formula that allows expressing the product between the vectors of the base of the vector space, as it is proposed in the algebra $\mathcal{A}_n$ (see [6]). This research offers an explicit expression for the product of certain elements of the base of the algebra $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$, which represents the opening to deduce calculations that yield new contributions in the Clifford analysis with parameters.

Keywords: Clifford algebra; vector product; Leibniz formula.

Mathematics Subject Classification: 15A66, 35N99.

1 Introducción

En los últimos años, el tema de los problemas de valores iniciales en las álgebras de Clifford ha sido abordado a través del método de los espacios asociados [7, 11, 12]. En el 2015, con la ayuda de la ecuación (1.1) editada en [6], los autores de [4] lograron resolver los problemas de valores iniciales planteados en el álgebra $\mathcal{A}_n$. Posteriormente en el artículo [2], estos problemas se abordan en las álgebras de Clifford dependientes de parámetros $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$. En estas publicaciones, entre otras [1, 5, 8, 9, 10, 13], previo a aplicar el método de los espacios asociados se determina una expresión, denominada fórmula de Leibniz, para calcular $D(u, v)$, donde u y v son funciones dadas en el álgebra de Clifford considerada y D es el operador de Cauchy Riemann:

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^{n} e_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1}$$

Inspirados en estos trabajos surgió el propósito de establecer una fórmula de Leibniz sobre funciones u y v con valores en el álgebra $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$. Previo a este resultado se proporciona el producto $e_i\, e_A$ entre los elementos e_i y e_A, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A \in \Gamma_n = \{0, 1, 2, \ldots, n, 12, 13, \ldots, 1n, \ldots, 123 \ldots n\}$, pertenecientes a la base del álgebra $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$.

2 Preliminares

Las álgebras de Clifford con parámetros se definen como clases de equivalencia sobre el anillo de polinomios $\mathcal{R}[X_1, \ldots, X_n]$ con coeficientes reales, bajo las relaciones de equivalencia más generales que:

$$X_j^{k_j} + \alpha_j(p) \sim 0,$$

$$X_j X_i + X_i X_j - 2\gamma_{ij}(p) \sim 0, \quad i, j = 1, \ldots n,$$

donde los valores k_j son enteros no negativos mayores e iguales a 2, $\alpha_j(p)$ y $\gamma_{ij}(p) = \gamma_{ji}(p)$ son funciones de valores reales que dependen posiblemente de un parámetro p. Estas álgebras se denotan por:

$$\mathcal{A}_n(p|k_j, \alpha_j(p), \gamma_{ij}(p)) \text{ si } n \geq 2,$$

$$A_1(p|k, \alpha(p)) \text{ si } n = 1.$$

Cuando las funciones α_j y γ_{ij} no dependan del parámetro p, estas álgebras se denotarán por:

$$A_n(k_j, \alpha_j, \gamma_{ij}) \text{ si } n \geq 2,$$

$$A_1(k, \alpha) \text{ si } n = 1.$$

Específicamente, en este trabajo se utilizará el álgebra $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$, que está dotada de las relaciones de estructuras:

$$e_i^2 = -\alpha_i,$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\gamma_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j.$$

El vector e_A perteneciente a la base del álgebra $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$, suele denotarse $e_A = e_{h_1 \cdots h_r}$ donde $A = \{h_1, \cdots, h_r\} \subseteq \{1, \cdots, n\}$ además tenemos que recordar que $1 \leq h_1 < \cdots < h_r \leq n$. Además, si $A = \emptyset$, entonces $e_A = e_0 = 1$. Así, cada elemento a en $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$ se representa $a = \sum_{A \in \Gamma_n} a_A e_A$, donde $a_A \in \mathbb{R}$ y $\Gamma_n = \{0, 1, 2, \ldots, n, 12, 13, \ldots, 1n, \ldots, 123 \ldots n\}$. Se usará la notación Γ_n^*, para el conjunto $\Gamma_n - \{0\}$.

Sea Ω un conjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Las funciones u definidas en Ω y con valores en el álgebra $\mathcal{A}_n$ estarán definidas como:

$$u(x) = \sum_{A\in\Gamma_n} u_A(x)e_A, \quad x = (x_0, \ldots, x_n) \in \Omega,$$

donde cada u_A es una función de valor real.

Se dirá que la función u posee cierta propiedad (continuidad, diferenciabilidad, entre otras) si cada función u_A, $A \in \Gamma_n$, posee esas propiedades.

Definición 1 *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^{n+1}$ y u una función definida y de clase C^1 en Ω, con valores en las álgebras de Clifford. Se dice que la función u es monogénica a la izquierda (derecha) si satisface la ecuación:*

$$Du = 0 \; (uD = 0).$$

3 Resultados previos

En el álgebra $\mathcal{A}_n$ (ver [6]) se establece el producto:

$$e_A e_B = (-1)^{\#(A\cap B)}(-1)^{P(A,B)} e_{A\Delta B},$$

donde $\#A$ representa la cardinalidad del conjunto A:

$$P(A,B) = \sum_{j\in B} P(A,j), \tag{2}$$

$$P(A,j) = \#\{i \in A : i > j\}. \tag{3}$$

Los conjuntos A, B y $A\Delta B$ (diferencia simétrica entre A y B) están ordenados en la forma prescrita.

La expresión (2) sigue siendo válida en el álgebra $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$. En las próximas demostraciones se usará la fórmula:

$$P(\{i\}, A) = \#\{j \in A : i > j\}. \tag{4}$$

Si $A \in \Gamma_n^*$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces se establecen las siguientes condiciones: **I)** $\#A$ es impar e $i \notin A$ **II)** $\#A$ es par e $i \in A$.

Lema 1 *Si los conjuntos A e $\{i\}$ satisfacen las condiciones **I)** o **II)**, entonces:*

$$\omega(i, A) = (-1)^{p(\{i\},A)} - (-1)^{p(A,\{i\})} \neq 0.$$

Demostración. Sea $A = \{h_1, h_2, \cdots, h_s, h_{s+1}, \cdots, h_r\}$. Luego, $\#A = r$. Si se considera válida la condición **I)**, entonces se escoge:

$$h_1 < h_2 < \cdots < h_s < i < h_{s+1} < \cdots < h_r.$$

De este modo, $p(A,\{i\}) = r - s$ y $p(\{i\}, A) = s$. Ahora, siendo r impar se tiene:

$$\omega_{i,A} \;=\; (-1)^s - (-1)^{r-s} = [1 - (-1)^r]\,(-1)^s = 2(-1)^{p(\{i\},A)}.$$

Por otro lado, si la condición **II)** se satisface, entonces se considera:

$$h_1 < h_2 < \cdots < h_s < h_{s+1} = i < h_{s+2} < \cdots < h_r.$$

Así, $p(A, \{i\}) = r - s - 1$ y $p(\{i\}, A) = s$. De la condición r es par, se cumple:

$$\omega_{i,A} \;=\; (-1)^s - (-1)^{r-s-1} = \left[1 + (-1)^{r-1}\right](-1)^s = 2(-1)^{p(\{i\},A)}.$$

Así, se concluye la prueba.

Si los conjuntos $\{i\}$ y $A \in \Gamma_n^*$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, satisfacen las condiciones **I)** o **II)**, entonces se escribirá $(i, A) \in \Phi$. Así, la función $\omega(i, A)$ establecida en (1), se reduce a:

$$\omega(i, A) = 2(-1)^{p(\{i\},A)},$$

siempre que $(i, A) \in \Phi$. ■

En las próximas demostraciones los conjuntos $A_k = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ y $A_{k+1} = \{h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1}\}$ se consideran como elementos en Γ_n. Además, a continuación se etiquetarán todas las posibles relaciones entre los elementos del conjunto $A_{k+1} = \{h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1}\}$ y el elemento $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$h_1 < \cdots < h_{s-1} < h_s = i < h_{s+1} < \cdots < h_k < h_{k+1}, \tag{5}$$

$$h_1 < \cdots < h_{s-1} < h_s < i < h_{s+1} < \cdots < h_k < h_{k+1}, \tag{6}$$

$$i < h_1 < \cdots < h_k < h_{k+1}, \tag{7}$$

$$h_1 < \cdots < h_k < i < h_{k+1}, \tag{8}$$

$$i = h_{k+1}, \tag{9}$$

$$h_1 < h_2 < \cdots < h_{k+1} < i. \tag{10}$$

Lema 2 *Sean* $A_k = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ *y* $A_{k+1} = \{h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1}\}$ *elementos en* Γ_n *e* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, entonces:*

$$P(\{i\}, A_{k+1}) = \begin{cases} P(\{i\}, A_k), & i \leq h_{k+1} \\ \\ P(\{i\}, A_k) + 1, & i > h_{k+1}. \end{cases}$$

Demostración. Si se considera $i \leq h_{k+1}$, entonces los casos (5)-(9) permiten obtener:

$$\begin{aligned} P(\{i\}, A_{k+1}) &= s - 1, \\ P(\{i\}, A_{k+1}) &= s, \\ P(\{i\}, A_{k+1}) &= 0, \\ P(\{i\}, A_{k+1}) &= k, \\ P(\{i\}, A_{k+1}) &= k \end{aligned}$$

respectivamente, así

$$P(\{i\}, A_k) = P(\{i\}, A_{k+1}).$$

Por otro lado, la condición $i > h_{k+1}$ corresponde al caso (10). De este modo, se tiene $P(\{i\}, A_{k+1}) = k + 1$ y $P(\{i\}, A_k) = k$. Concluyendo así la demostración. ■

Proposición 1 *Sean* A_k *y* A_{k+1} *elementos en* Γ_n *e* $i \in \{1 \ldots n\}$*.*

i) Si $i \neq h_{k+1}$*, entonces:*

$$\{i\} \cap A_k = \{i\} \cap A_{k+1}. \tag{11}$$

ii) Si $i = h_{k+1}$*, entonces:*

$$\{i\} \cap A_k = \emptyset \quad y \quad \{i\} \cap A_{k+1} = h_{k+1}.$$

Demostración. Sean A_k y A_{k+1} elementos en Γ_n e $i \in \{1 \ldots n\}$. Para demostrar **i)** Se requiere examinar varios casos. Si se considera el establecido en (5), se obtiene:

$$\{i\} \cap A_k = \{i\} \cap A_{k+1} = \{h_s\}.$$

Por otra parte, si se verifican las condiciones (6), (7), (8) y (10), se cumple:

$$\{i\} \cap A_k = \{i\} \cap A_{k+1} = \emptyset.$$

Finalmente, de acuerdo con las estructuras de los conjuntos A_k y A_{k+1}, la comprobación de **ii)** es inmediata. ■

Proposición 2 *Sean A_k y A_{k+1} en Γ_n e $i \in \{1,\ldots,n\}$, entonces:*

$$e_{i\Delta A_k}\, e_{h_{k+1}} = \begin{cases} e_{i\Delta A_{k+1}}, & i < h_{k+1} \\ \\ -\alpha_{h_{k+1}} e_{i\Delta A_{k+1}}, & i = h_{k+1} \\ \\ 2\gamma_{h_{k+1},i} e_{A_k} - e_{i\Delta A_{k+1}}, & i > h_{k+1}. \end{cases} \tag{12}$$

Demostración. Sean A_k y A_{k+1} elementos en Γ_n e $i \in \{1,\ldots,n\}$. Observe que, bajo la condición $i < h_{k+1}$ se consideran los casos (5), (6), (7) y (8). De este modo, se llega a los siguientes resultados:

$$e_{i\Delta A_k} e_{h_{k+1}} = e_{h_1\cdots h_{s-1}h_{s+1}\cdots h_k} e_{h_{k+1}} = e_{h_1\cdots h_{s-1}h_{s+1}\cdots h_k h_{k+1}} = e_{i\Delta A_{k+1}},$$

$$e_{i\Delta A_k} e_{h_{k+1}} = e_{h_1\cdots h_s i h_{s+1}\cdots h_k} e_{h_{k+1}} = e_{h_1\cdots h_s i h_{s+1}\cdots h_k h_{k+1}} = e_{i\Delta A_{k+1}},$$

$$e_{i\Delta A_k} e_{h_{k+1}} = e_{i h_1\cdots h_k} e_{h_{k+1}} = e_{i h_1\cdots h_k h_{k+1}} = e_{i\Delta A_{k+1}},$$

$$e_{i\Delta A_k} e_{h_{k+1}} = e_{h_1\cdots h_k i} e_{h_{k+1}} = e_{h_1\cdots h_k i h_{k+1}} = e_{i\Delta A_{k+1}},$$

respectivamente.

Por otro lado, si $i = h_{k+1}$ entonces:

$$e_{i\Delta A_k} e_{h_{k+1}} = e_{h_1\cdots h_k h_{k+1}} e_{h_{k+1}} = -\alpha_{h_{k+1}} e_{i\Delta A_{k+1}}.$$

Finalmente, el caso $i > h_{k+1}$ implica:

$$\begin{aligned} e_{i\Delta A_k} e_{h_{k+1}} &= e_{h_1\cdots h_k i} e_{h_{k+1}} = e_{h_1\cdots h_k}(2\gamma_{h_{k+1},i} - e_{h_{k+1} i}) \\ &= 2\gamma_{h_{k+1},i} e_{A_k} - e_{i\Delta A_{k+1}}. \end{aligned}$$

De este modo se comprueba (12). ■

4 Fórmula producto en $\mathcal{A}_n(2,\alpha_j,\gamma_{ij})$

Sean e_i y e_A elementos pertenecientes a la base del álgebra $\mathcal{A}_n(2,\alpha_j,\gamma_{ij})$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $A \in \Gamma_n$. El propósito de esta sección es establecer el producto $e_i\, e_A$ (denotado e_{iA}) en el álgebra $\mathcal{A}_n(2,\alpha_j,\gamma_{ij})$.

En el próximo teorema el caso $A = \emptyset$ no se considera por ser evidente.

Teorema 1 *Sean $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $A \in \Gamma_n$. Entonces:*

$$\begin{aligned} e_{iA} &= \alpha_{\{i\}\cap A}(-1)^{n(\{i\}\cap A)}(-1)^{P(\{i\},A)} e_{\{i\}\Delta A} \\ &\quad +2\sum_{j<i,j\in A}(-1)^{P(\{j\},A)}\gamma_{ji} e_{\{j\}\Delta A}, \end{aligned} \tag{13}$$

donde $\alpha_0 = 1$.

Demostración. La demostración se abordará usando inducción matemática sobre el cardinal del conjunto A, denotado $\#A$. Si $\#A = 1$ la fórmula (13) se cumple. En efecto, considerando $A = \{i\}$, se verifica $e_i\, e_i = -\alpha_i$. Por otro lado, si $A = \{j\}$ y $i < j$, entonces $e_i\, e_j = e_i\, e_j$. Finalmente, si $j < i$ se cumple $e_i\, e_j = -e_j\, e_i + 2\gamma_{ij}$. Ahora, supóngase que la expresión (13) es válida para $\#A = k$, entonces se demostrará que esta fórmula también se cumple para el caso $\#A = k + 1$.

Considerando $A_{k+1} = \{h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1}\}$ como elemento en Γ_n, se comprobará que dicho conjunto satisface (13). Por inducción, la expresión (13) es válida para $A_k = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$, entonces multiplicándola a la derecha por el vector $e_{h_{k+1}}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} e_{iA_k} e_{h_{k+1}} = e_{iA_{k+1}} &= \alpha_{\{i\}\cap A_k}(-1)^{n(\{i\}\cap A_k)}(-1)^{P(\{i\},A_k)} e_{\{i\}\Delta A_k} e_{h_{k+1}} \\ &\quad +2 \sum_{j<i,j\in A_k} (-1)^{P(j,A_k)} \gamma_{ji} e_{\{j\}\Delta A_k} e_{h_{k+1}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Si se considera el caso $i < h_{k+1}$, del Lema 2, de la Proposición 1 y de la Proposición 2 surge:

$$\begin{aligned} e_{iA_{k+1}} &= \alpha_{i\cap A_{k+1}}(-1)^{n(\{i\}\cap A_{k+1})}(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})} e_{i\Delta A_{k+1}} \\ &\quad +2 \sum_{j<i,j\in A_k} (-1)^{P(\{j\},A_{k+1})} \gamma_{ji} e_{j\Delta A_{k+1}}. \end{aligned}$$

Puesto que $j < i < h_{k+1}$, entonces:

$$\begin{aligned} e_{iA_{k+1}} &= \alpha_{i\cap A_{k+1}}(-1)^{n(\{i\}\cap A_{k+1})}(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})} e_{i\Delta A_{k+1}} \\ &\quad +2 \sum_{j<i,j\in A_{k+1}} (-1)^{P(\{j\},A_{k+1})} \gamma_{ji} e_{j\Delta A_{k+1}}, \end{aligned}$$

verificándose así (14). Para el caso $i = h_{k+1}$, se aplica el Lema 2 y la Proposición 2, luego:

$$\begin{aligned} e_{iA_{k+1}} &= \alpha_0(-1)^0(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})}(-1)\alpha_{k+1} e_{\{i\}\Delta A_{k+1}} \\ &\quad +2 \sum_{j<i,j\in A_k} (-1)^{P(\{j\},A_k)} \gamma_{ji} e_{j\Delta A_k} e_{k+1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Puesto que $j < i < h_{k+1}$, se sigue cumpliendo $P(\{j\}, A_{k+1}) = P(\{j\}, A_k)$ y $e_{j\Delta A_k} e_{k+1} = e_{j\Delta A_{k+1}}$. Por otro lado considerando (1), la ecuación (15) puede escribirse:

$$\begin{aligned} e_{iA_{k+1}} &= \alpha_{\{i\}\cap A_{k+1}}(-1)^{n(\{i\}\cap A_{k+1})}(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})} e_{\{i\}\Delta A_{k+1}} \\ &\quad +2 \sum_{j<i, j\in A_{k+1}} (-1)^{P(\{j\},A_{k+1})} \gamma_{ji} e_{\{j\}\Delta A_{k+1}}. \end{aligned}$$

Resta demostrar el caso $h_{k+1} < i$. Fíjense que, como $j \notin A_{k+1}$ solo debe considerarse el caso $j \leq h_{k+1}$. Usando nuevamente la expresión (14), se aplicará el Lema 2 y la Proposición 2, de modo que:

$$\begin{aligned} e_{iA_{k+1}} &= \alpha_{\{i\}\cap A_{k+1}}(-1)^{n(\{i\}\cap A_k)}(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})-1}\left[2\gamma_{h_{k+1},i} e_{A_k} - e_{i\Delta A_{k+1}}\right] \\ &\quad +2 \sum_{j<i, j\in A_k} (-1)^{P(\{j\},A_k)} \gamma_{ji} e_{\{j\}\Delta A_k} e_{h_{k+1}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Observe que $\alpha_{\{i\}\cap A_{k+1}}(-1)^{n(\{i\}\cap A_k)} = 1$. Además si $j \leq h_{k+1}$, entonces: $e_{\{j\}\Delta A_k} e_{h_{k+1}} = e_{\{j\}\Delta A_{k+1}}$. Así, la expresión (16) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} e_{iA_{k+1}} &= \alpha_{\{i\}\cap A_{k+1}}(-1)^{n(\{i\}\cap A_{k+1})}(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})} e_{\{i\}\Delta A_{k+1}} \\ &\quad -2(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})} \gamma_{h_{k+1},i} e_{A_k} \\ &\quad +2 \sum_{j<i, j\in A_k} (-1)^{P(\{j\},A)} \gamma_{ji} e_{\{j\}\Delta A_{k+1}}. \end{aligned}$$

El término $2(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})}\gamma_{h_{k+1},i} e_{A_k}$ puede incluirse en la última sumatoria a través de la igualdad $(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})+1} = (-1)^{P(\{h_{k+1}\},A_{k+1})}$. Finalmente, siendo $A_k = \{h_{k+1}\}\Delta A_{k+1}$, se consigue el resultado:

$$\begin{aligned} e_{iA_{k+1}} &= \alpha_{\{i\}\cap A_{k+1}}(-1)^{n(\{i\}\cap A_{k+1})}(-1)^{P(\{i\},A_{k+1})} e_{\{i\}\Delta A_{k+1}} \\ &\quad +2 \sum_{j<i, j\in A_{k+1}} (-1)^{P(\{j\},A_{k+1})} \gamma_{ji} e_{\{j\}\Delta A_{k+1}}. \end{aligned}$$

Todo lo examinado, permite concluir la prueba. ■

De modo análogo se cumple, el lema 3.

Lema 3 *Sean $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $A \in \Gamma_n$. Entonces:*

$$\begin{aligned} e_{Ai} &= \alpha_{\{i\}\cap A}(-1)^{n(\{i\}\cap A)}(-1)^{P(A,\{i\})} e_{\{i\}\Delta A} \\ &\quad +2 \sum_{j>i, j\in A} (-1)^{P(\{j\},A)} \gamma_{ij} e_{\{j\}\Delta A}. \end{aligned} \tag{17}$$

5 Aplicaciones

En esta sección, usando las expresiones (13) y (17), se plantea una expresión alternativa a la presentada en [2] para calcular $D(u,v)$ donde u y v son funciones en el álgebra de Clifford dependientes de parámetro $\mathcal{A}_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$.

Lema 4 *Sean:*

$$u = \sum_{A\in\Gamma_n} u_A e_A \quad y \quad v = \sum_{A\in\Gamma_n} v_A e_A, \tag{18}$$

funciones de clase C^1 con valores en $\mathcal{A}_n(2,\alpha_j,\gamma_{ij})$. Entonces:

$$D(u,v) \;=\; D(u)\,v + \sum_{i=0}^{n} e_i\,u\,\partial_i(v).$$

Demostración: Sean u y v funciones de clase C^1 con valores en $\mathcal{A}_n(2,\alpha_j,\gamma_{ij})$ de la forma (18). Aplicando el operador de Cauchy-Riemann generalizado sobre el producto $u\,v$ y usando el Lema 3.1.1 de [3], resulta:

$$\begin{aligned} D(u,v) &= \sum_{i=0}^{n} e_i\left(\partial_i(u)\,v + u\,\partial_i(v)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} e_i\,\partial_i(u)\,v + \sum_{i=0}^{n} e_i\,u\,\partial_i(v) \qquad (19) \\ &= D(u)\,v + \sum_{i=0}^{n} e_i\,u\,\partial_i(v). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2 *Considérense las funciones u y v de la forma (18), de clase C^1 y con valores en el álgebra $\mathcal{A}_n(2,\alpha_j,\gamma_{ij})$. Entonces, es válida la expresión:*

$$\begin{aligned} D(u,v) \;=\;& D(u)\,v + u\,D(v) \qquad (20) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{A\in\Gamma_n}\Big[\alpha_{\{i\}\cap A}(-1)^{n(\{i\}\cap A)}\omega_{i,A}e_{\{i\}\Delta A} \\ &+2\sum_{j<i,j\in A}(-1)^{P(\{j\},A)}\gamma_{ji}e_{\{j\}\Delta A} \\ &-\sum_{j>i,j\in A}(-1)^{P(A,\{j\})}\gamma_{ij}e_{\{j\}\Delta A}\Big]u_A\partial_i v. \end{aligned}$$

Demostración. Por el Lema 4,

$$D(u,v) \quad = \quad D(u)\,v + \sum_{i=0}^{n} \sum_{A\in\Gamma} u_A\, e_i\, e_A\, \partial_i(v).$$

Considerando la diferencia de las expresiones (13) y (17) queda:

$$\begin{aligned} e_i\, e_A \quad &= \quad e_A\, e_i + \alpha_{\{i\}\cap A}(-1)^{n(\{i\}\cap A)}((-1)^{P(\{i\},A)} - (-1)^{P(A,\{i\})})e_{\{i\}\Delta A} \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{A\in\Gamma_n} \Big[\sum_{j\in A,\, j<i} (-1)^{p(\{i\},A)} \gamma_{ji} e_{(A\triangle\{j\})} \\ &\quad - \sum_{j\in A,\, j>i} (-1)^{p(A,\{i\})} \gamma_{ij} e_{(A\triangle\{j\})} \Big] u_A \partial_i v, \qquad (21) \end{aligned}$$

donde $i, j = 1, \ldots n$. Sustituyendo esta última expresión en (21) y designando:

$$\omega(i,A) = (-1)^{P(\{i\},A)} - (-1)^{P(A,\{i\})},$$

se obtiene de inmediato (20). ■

Corolario 1 *Considérense las funciones u y v de la forma (18), de clase C^1 y con valores en el álgebra $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$. Entonces es válida la expresión:*

$$\begin{aligned} D(u,v) \quad &= \quad D(u)\,v + u\,D(v) \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{(i,A)\in\Phi} \alpha_{\{i\}\cap A}(-1)^{p(\{i\},A)} e_{\{i\}\Delta A} u_A \partial_i v \qquad (22) \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{A\in\Gamma_n} \Big[\sum_{j<i, j\in A} (-1)^{P(\{j\},A)} \gamma_{ji} e_{\{j\}\Delta A} \\ &\quad - \sum_{j>i, j\in A} (-1)^{P(A,\{j\})} \gamma_{ij} e_{\{j\}\Delta A} \Big] u_A \partial_i v. \qquad (23) \end{aligned}$$

5.1 Caso $n = 2$ y $n = 3$

Ahora se revisa la fórmula $D(u,v)$ en el caso $n = 2$ y $n = 3$. A través del Teorema 2, si $n = 2$, entonces $\Gamma_2 = \{0, 1, 2, 12\}$. De este modo, en el álgebra $\mathcal{A}_2(2, \alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
D(u,v) &= D(u)\, v + u\, D(v) \\
&\quad +(\alpha_{\{1\}\cap\{2\}}(-1)^{n(\{1\}\cap\{2\})}\omega_{(1,\{2\})}e_{12} \\
&\quad -2(-1)^{P(\{2\},\{2\})}\gamma e_{\{0\}})u_2\partial_1 v \\
&\quad +(\alpha_{\{2\}\cap\{1\}}(-1)^{n(\{2\}\cap\{1\})}\omega_{(2,\{1\})}e_{12} \\
&\quad +2(-1)^{P(\{1\},\{1\})}\gamma e_{\{0\}})u_1\partial_2 v \\
&\quad +(\alpha_{\{1\}\cap\{1,2\}}(-1)^{n(\{1\}\cap\{1,2\})}\omega_{(1,\{1,2\})}e_2 \\
&\quad -2(-1)^{P(\{1,2\},\{1\})}\gamma e_{\{1\}}))u_{12}\partial_1 v \\
&\quad +(\alpha_{\{2\}\cap\{1,2\}}(-1)^{n(\{2\}\cap\{1,2\})}\omega_{(2,\{1,2\})}e_1 \\
&\quad +2(-1)^{P(\{1\},\{1,2\})}\gamma e_{\{2\}}))u_{12}\partial_2 v.
\end{aligned}$$

De los valores $p(\{1\}, A) = 0, A \in \Gamma_2$, y

$$p(\{2\},\{2\}) = 0, \quad p(\{2\},\{1\}) = p(\{2\},\{1,2\}) = p(\{1,2\},\{1\}) = 1.$$

$$\omega(1,\{2\}) = \omega(1,\{1,2\}) = 2, \quad \omega(2,\{1\}) = \omega(2,\{1,2\}) = -2,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
D(u,v) &= D(u)\, v + u\, D(v) \\
&\quad +2(-\gamma u_2 e_0 + 2\gamma e_1 u_{12} - \alpha_1 e_2 u_{12} + u_2 e_{12})\partial_1 v \\
&\quad +2(\gamma u_1 e_0 + \alpha_2 e_1 u_{12} + 2\gamma e_2 u_{12} - u_1 e_{12})\partial_2 v.
\end{aligned}$$

Observe que esta expresión coincide con los resultados obtenidos en [2].

Si $n = 3$, entonces $\Gamma_3 = \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23, 123\}$. De acuerdo con el resultado (20), a través de los valores $p(\{1\}, A) = 0, A \in \Gamma_3$,

$$\omega(1, \{2\}) = \omega(1, \{3\}) = \omega(2, \{3\}) = \omega(1, \{1, 2\})$$
$$\omega(1, \{1, 3\}) = \omega(2, \{2, 3\}) = 2$$
$$\omega(2, \{1\}) = \omega(3, \{1\}) = \omega(3, \{2\}) = \omega(2, \{1, 2\})$$
$$\omega(3, \{1, 3\}) = \omega(3, \{2, 3\}) = -2$$

y

$$p(\{2\}, \{1\}) = p(\{2\}, \{1, 2\}) = p(\{2\}, \{1, 3\}) = p(\{2\}, \{1, 2, 3\}) = 1$$
$$p(\{3\}, \{1\}) = p(\{3\}, \{2\}) = p(\{3\}, \{1, 3\}) = p(\{3\}, \{2, 3\}) = 1$$
$$p(\{3\}, \{1, 2\}) = p(\{3\}, \{1, 2, 3\}) = 2.$$

Así, en el álgebra $\mathcal{A}_3(2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
D(u, v) \;\; = \;\; & D(u)\, v + u\, D(v) \\
& +2\Big[(-\gamma_{12}u_2 - \gamma_{13}u_3)e_0 + (-\gamma_{12}u_{12} - \gamma_{13}u_{13})e_1 \\
& +(-\alpha_1 u_{12} - \gamma_{13}u_{23})e_2 + (-\alpha_1 u_{13} + \gamma_{12}u_{23})e_3 \\
& +(u_2 - \gamma_{13}u_{123})e_{12} + (u_3 + \gamma_{12}u_{123})e_{13}\Big]\partial_1 v \\
& +2\Big[(u_1 + \gamma_{23}u_3)e_0 + (\alpha_2 u_{12} + \gamma_{12}u_{12} - \gamma_{12}u_{12})e_1 \\
& +(\gamma_{12}u_{12} - \gamma_{23}u_{23})e_2 + (-\gamma_{12}u_{13} - \alpha_2 u_{23})e_3 \\
& +(u_1 - \gamma_{23}u_{123})e_{12} + (u_3 + \gamma_{12}u_{123})e_{23}\Big]\partial_2 v \\
& +2\Big[(\gamma_{13}u_1 - \gamma_{23}u_2)e_0 + (\alpha_3 u_{13} + \gamma_{23}u_1)e_1 \\
& +(-\alpha_3 u_{23} + \gamma_{13}u_2)e_2 + (\gamma_{23}u_{23} + \gamma_{13}u_{13})e_3 \\
& +(-u_1 - \gamma_{23}u_{123})e_{13} + (-u_2 + \gamma_{13}u_{123})e_{23}\Big]\partial_3 v.
\end{aligned}$$

Hasta ahora, en el álgebra de Clifford con parámetros $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$, no existe un producto análogo al obtenido en [6] sobre el álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$, sin embargo la presente investigación propone el Teorema 1 como una herramienta para obtener la deseada generalización.

Además, debe destacarse que lo novedoso de los resultados planteados en el Teorema 1 y el Teorema 2 radica en que los cálculos expuestos vienen expresados explícitamente en función de los valores α_i y γ_{ij}, $i, j = 1, \ldots n$. Consecuentemente, en el análisis de Clifford $\mathcal{A}_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$ los cálculos resultan más efectivos.

Agradecimientos y reconocimiento

Las autoras agradecen a la profesora Carmen Judith Vanegas por su motivación permanente en la investigación en el área de Análisis de Clifford. Esta investigación es fruto de una Tesis de Pregrado de la Universidad de Oriente. Reconocemos el gran aporte de esta institución en la formación académica de los jóvenes venezolanos en el oriente del País.

Fuentes de financiamiento

Esta investigación fue parcialmente financiada por el Consejo de Investigación de la Universidad de Oriente, a través del proyecto intitulado: "Estudio de Problemas de Valores Iniciales de las álgebras de Clifford", con el código $CI-02-010200-1945-15$.

Referencias

[1] E. Ariza, A. Di Teodoro, M. Sapiain, F. Vargas, *Sufficient conditions for first-order differential operators to be associated with a q-metamonogenic operator in a Clifford type algebra*, Comput. Methods Funct. Theory **17**(2017), no. 2, 211–236. Doi: `10.1007/s40315-016-0182-y`

[2] E. Ariza, J. Vanegas, F. Vargas, *First order differential operators associated to the space of monogenic functions in parameter-depending Clifford algebras*, Adv. Appl. Clifford Algebras **26**(2016), no. 1, 13–29. Doi: `10.1007/s00006-015-0577-2`

[3] Y. Bolívar, *Problemas de valores iniciales en análisis de Clifford generalizado*. Tesis de Doctorado, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 2013.

[4] Y. Bolívar, L. Lezama, L. Mármol, C. Vanegas, *Associated spaces in Clifford analysis*, Adv. Appl. Clifford Algebras **25**(2015), 539–551. Doi: `10.1007/s00006-015-0528-y`

[5] Y. Bolívar, C. Vanegas, *Initial value problems in Clifford-type analysis*, Complex Variables and Elliptic Equations **58**(2013), no. 4, 557–569. Doi: `10.1080/17476933.2012.697458`

[6] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen, *Clifford Analysis*. Research Notes in Mathematics **76**, Pitman Books Ltd., Boston MA, 1982.

[7] R. Heersink, W. Tutschke, *Solution of initial value problems in associated spaces*, in: W. Tutschke & A.S. Mshimba (Eds.) Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations (Trieste, Italia 1993). World Sci. Publ., Singapore, 1995, pp. 209–219. Doi: `10.1142/2927`

[8] N.Q. Hung, *Initial value problems in Quaternionic analysis with a disturbed Dirac operator*, Adv. Appl., Clifford Algebras **22**(2012), no. 4, 1061–1068. Doi: `10.1007/s00006-012-0332-x`

[9] N.Q. Hung, N.C. Luong, *First order differential operators associated to the Dirac operator of quaternionic analysis*, in: Methods of Complex and Clifford Analysis, Proceedings of ICAM (Hanoi, 2004), SAS International Publications, Delhi, 2006, pp. 369–378.

[10] L.H. Son, N.Q. Hung, *The initial value problems in Clifford and Quaternion analysis*, in: Proceedings of the 15th ICFIDCAA 2007, Osaka, Japan, Municipal Universities Press **3**, 2008, pp. 317–323.

[11] L.H. Son, W. Tutschke, *Complex methods in higher dimensions. Recent trends for solving boundary value and initial value problems*, Complex Var. Theory Appl **50**(2005), no. 7-11, 673–679. Doi: `10.1080/02781070500087600`

[12] W. Tutschke, *Associated spaces - A new tool of real and complex analysis*, in: Function Spaces in Complex and Clifford Analysis, National University Publishers, Hanoi, Vietnam, 2008, pp. 253–268.

[13] J. Vanegas, F. Vargas, *Associated Operators to the Space of Meta-q-Monogenic Functions*, in: P. Cerejeiras, C.A. Nolder, J. Ryan, C.J. Vanegas Espinoza (Eds.) Clifford Analysis and Related Topics, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer Nature Switzerland AG, 2018, pp. 141-152. Doi: `10.1007/978-3-030-00049-3-8`