© Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2021 **28**(2) : 237–259
cimpa – ucr   issn: 1409-2433 (Print), 2215-3373 (Online)
doi: 10.15517/rmta.v28i2.44748

ÍNDICE DE CONLEY Y SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS

CONLEY INDEX AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS

Yesenia Zapata Gómez* Miguel Angel Dela-Rosa†
Jair Remigio-Juárez‡

Received: 4/Dec/2020; Revised: 29/Mar/2021;
Accepted: 12/Apr/2021

---

*Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, División Académica de Ciencias Básicas, Cunduacán, Tabasco, México. E-Mail: yeseniazapataa1@gmail.com
†Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, División Académica de Ciencias Básicas, Cunduacán, Tabasco, México.
E-Mail: madelarosaca@conacyt.mx
‡Misma dirección que/*Same address as*: Y. Zapata. E-Mail: jair.remigio@ujat.mx

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es aplicar métodos topológicos para obtener resultados sobre flujos continuos determinados por ecuaciones diferenciales. Específicamente, aplicamos la teoría del índice de Conley para demostrar que, bajo ciertas condiciones, existe un conjunto invariante que contiene una solución no trivial. La construcción de este conjunto invariante es puramente topológica y depende del flujo de la ecuación diferencial, pero la existencia de la solucion no trivial se obtiene como una aplicación de técnicas de homología. En este artículo expositivo desarrollamos y precisamos estas ideas, y para conseguir un mejor entendimiento incluimos algunos ejemplos y cálculos en algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. Este trabajo está basado principalmente en [6].

Palabras clave: índice de Conley; homología; dinámica continua; equivalencia homotópica; principio de Ważewski.

Abstract

The goal of this work is to apply topological methods to obtain results about continuous flows determined by differential equations. Specifically, we apply the Conley Index Theory to prove that, under certain assumptions, there is an invariant set which contains a non-trivial solution. The construction of this invariant set is purely topological and depends on the flow of the differential equation, but the existence of the non-trivial solution is obtained as an application of homological techniques. In this survey paper we develop and precise these ideas, and in order to get a better understanding we include some examples and computations in some ordinary differential equations. This work is mostly based on [6].

Keywords: Conley index; homology; continuous dynamics; homotopic equivalence; Ważewski principle.

Mathematics Subject Classification: 34-02, 37-02, 37B30.

1 Introducción

En sistemas dinámicos continuos, en particular en flujos asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, es de interés analizar bajo qué condiciones existen soluciones contenidas (para todo tiempo positivo) en regiones no necesariamente invariantes. Con este fin, utilizaremos técnicas de topología algebraica como lo es la teoría de homología cúbica, la cual consiste en analizar la relación de estructuras topológicas de espacios, a través de conjuntos llamados cubos que son el análogo a los simplejos usados en homología simplicial; las técnicas que se usan son paralelas a las conocidas en topología algebraica tradicional (ver [2], [5]). Recientemente, estas técnicas se han usado para proporcionar resultados de interés en el área de sistemas dinámicos, en particular, se pueden utilizar para garantizar la existencia de soluciones contenidas en un conjunto no necesariamente invariante, asociadas a un flujo continuo definido sobre un espacio topológico. Aplicaciones de esto se pueden encontrar en flujos asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver [4], [1]).

Una vez desarrollada la homología daremos lugar a la noción de conjunto de Ważewski, y con ello el principio del mismo nombre. Este tipo de conjuntos no necesariamente son invariantes, y sin embargo, podemos bajo ciertas condiciones, garantizar en ellos la existencia de soluciones no triviales y para probar dicha existencia haremos uso de las herramientas topológicas mencionadas anteriormente.

El segundo invariante de carácter topológico es el índice de Conley de un conjunto invariante aislado de un sistema dinámico, que a diferencia del principio de Ważewski éste se comporta bien bajo deformaciones. Este último concepto fue introducido por Charles Conley alrededor de 1978. Este trabajo está basado en [6].

2 Preliminares

2.1 Dinámica

A lo largo de esta sección se verán conceptos sobre algunos preliminares de sistemas dinámicos continuos que pueden ser consultados en [3] y [7].

Definición 1 *Sea $f \in \mathcal{C}^r(E)$, donde $\mathcal{C}^r(E)$ denota al conjunto de funciones continuas r diferenciables en E y E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces $x(t)$ es* ***una solución de la ecuación diferencial*** *$\dot{x} = f(x)$ sobre un intervalo I, si $x(t)$ es diferenciable sobre I, y además se satisface que $x(t) \in E$ y $x'(t) = f(x(t))$, para todo $t \in I$.*

Dado $x_0 \in E$, decimos que $x(t)$ es **una solución del problema de valor inicial**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

sobre un intervalo I, si $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$ y $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ sobre el intervalo I.

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de una solución de una ecuación diferencial para sistemas no lineales.

Teorema 1 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y sea $f \in \mathcal{C}^r(E)$. Entonces existe $a > 0$ tal que el problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

tiene una única solución $x(t)$ sobre el intervalo $[-a, a]$.

Definición 2 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f \in \mathcal{C}^1(E)$. Para $x_0 \in E$, sea $\phi(t, x_0)$ la solución del problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

definido sobre su intervalo maximal de existencia $I(x_0)$. Entonces para $t \in I(x_0)$, el conjunto de funciones definidas por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

*es llamado **el flujo definido por la ecuación diferencial** $\dot{x} = f(x)$.*

En relación a la definición anterior, en este trabajo se impondrá la hipótesis de que el intervalo maximal $I(x_0)$ es igual a $\mathbb{R}$.

Teorema 2 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f \in \mathcal{C}^1(E)$. Sea $t \in I(x_0)$ y $s \in I(\phi_t(x_0))$. Entonces para todo $x_0 \in E$ se sigue que $s + t \in I(x_0)$ y*

$$\phi_{s+t}(x_0) = \phi_s(\phi_t(x_0)).$$

Definición 3 *Consideremos un subconjunto abierto E de $\mathbb{R}^n$, una función $f \in \mathcal{C}^r(E)$ y el flujo $\phi_t : E \to E$ definido para todo $t \in \mathbb{R}$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. Un conjunto $S \subset E$ lo llamaremos **invariante** con respecto al flujo ϕ_t, si $\phi_t(S) \subset S$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Definición 4 *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de equilibrio** del sistema $\dot{x} = f(x)$, si $f(x_0) = 0$. Un punto de equilibrio x_0 es un punto de equilibrio **hiperbólico** del sistema $\dot{x} = f(x)$, si ninguno de los eigenvalores de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real cero. El sistema lineal $\dot{x} = Ax$ con la matriz $A = Df(x_0)$ es la **linealización** de $\dot{x} = f(x)$ en x_0. Ahora bien, si tenemos un punto de equilibrio x_0 de $\dot{x} = f(x)$ y $\phi_t : E \to \mathbb{R}^n$ es el flujo de dicha ecuación diferencial, pasa entonces que $\phi_t(x_0) = x_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y decimos que x_0 es un **punto de equilibrio** del flujo ϕ_t.*

Ejemplo 1 *Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x - x^3 - \alpha y, \ \ \alpha \neq 0. \end{array} \tag{1}$$

Entonces $(0,0)$ *es el único punto de equilibrio. La linealización en el punto de equilibrio es*

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Como podemos observar se trata de un punto de equilibrio hiperbólico cuando $\alpha \neq 0$*. En la Figura 1 se muestra el retrato fase del sistema (1).*

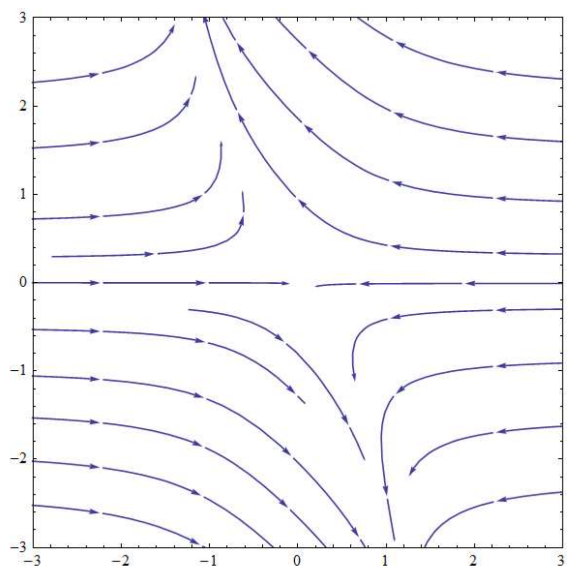

Figura 1: Retrato fase del sistema 1.

En la siguiente definición daremos la clasificación de estos puntos de equilibrio.

Definición 5 *Un punto de equilibrio* x_0 *del sistema* $\dot{x} = f(x)$ *es llamado un* ***pozo****, si todos los eigenvalores de* $Df(x_0)$ *tienen parte real negativa; es llamado una* ***fuente****, si todos los eigenvalores de* $Df(x_0)$ *tienen parte real positiva; y es llamado una* ***silla****, si es un punto de equilibrio hiperbólico y* $Df(x_0)$ *tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y al menos uno con parte real positiva.*

Ejemplo 2 *A continuación clasificaremos todos los puntos de equilibrio del sistema no lineal siguiente*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x_1} & = & x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x_2} & = & x_2 - x_1^2. \end{array} \tag{2}$$

Los únicos puntos de equilibrio del sistema son $(0,0),(1,1),(-1,1)$.

La derivada es

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 1-x_1 & -x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Df(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, Df(-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $(0,0)$ *es una fuente, mientras que* $(1,1)$ *y* $(-1,1)$ *son sillas. El retrato fase de este sistema se muestra en la Figura 2.*

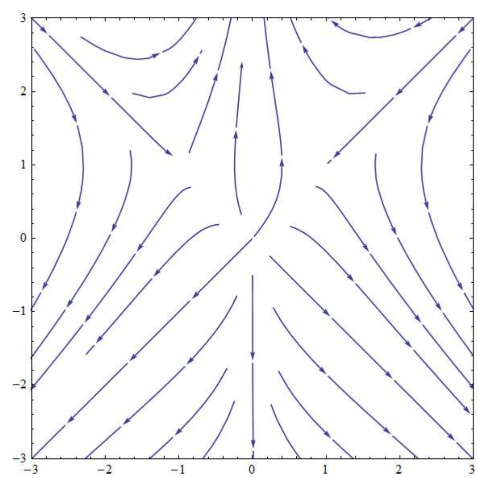

Figura 2: Retrato fase del sistema 2.

Otro teorema de gran importancia en la teoría de ecuaciones diferenciales es el teorema de Hartman-Grobman, el cual nos dice que alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico x_0, el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ tiene el mismo comportamiento cualitativo que el sistema lineal $\dot{x} = Ax$, esto es, dichos sistemas son topológicamente conjugados. Para poder enunciar este teorema, iniciaremos definiendo cuándo dos sistemas son topológicamente equivalentes.

Definición 6 *Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales como* $\dot{x} = f(x)$ *y* $\dot{y} = g(y)$ *son* ***topológicamente equivalentes*** *en una vecindad del origen, si existe un homeomorfismo* $H : U \to V$*, donde* U *y* V *son abiertos que contienen al origen. Este homeomorfismo H mapea trayectorias de* $\dot{x} = f(x)$ *en* U *a trayectorias de* $\dot{y} = g(y)$ *en* V *y preserva la orientación, es decir, si una trayectoria se dirige de* x_1 *a* x_2 *en* U*, entonces su imagen bajo* H *se dirige de* $H(x_1)$ *a* $H(x_2)$ *en* V*. Si* H *preserva la orientación con respecto al tiempo, se dice que* $\dot{x} = f(x)$ *es* ***topológicamente conjugado*** *a* $\dot{y} = g(y)$ *en una vecindad del origen, es decir,*

$$\varphi_t(H(x)) = H(\phi_t(x)).$$

Ahora estamos listos para enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3 (De Hartman-Grobman) *Consideremos un conjunto abierto* $E \subset \mathbb{R}^n$ *que contiene al origen,* $f \in \mathcal{C}^1(E)$ *y sea* ϕ_t *el flujo del sistema no lineal* $\dot{x} = f(x)$*. Supongamos que* $f(0) = 0$ *y que la matriz* $A = Df(0)$ *no tiene eigenvalores con parte real cero. Entonces, existe un homeomorfismo* $H : U \to V$ *donde* U *y* V *son abiertos y ambos contienen al origen, tales que, para cada* $x_0 \in U$*, existe un intervalo abierto* $I_0 \subset \mathbb{R}$ *que contiene al cero tal que, para todo* $x_0 \in U$ *y* $t \in I_0$*, se tiene que*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0).$$

Lo anterior significa que el homeomorfismo H *manda trayectorias de* $\dot{x} = f(x)$ *a trayectorias de* $\dot{x} = Ax$*, ambas cerca del origen, y además preserva parametrización con respecto al tiempo. Es decir, el sistema no lineal* $\dot{x} = f(x)$ *es topológicamente conjugado al sistema lineal* $\dot{x} = Ax$*, donde* $A = Df(x)$ *(ver Figura 3).*

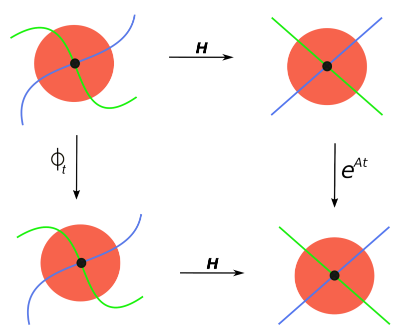

Figura 3: $H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$.

2.2 Resultados básicos de topología

Para definir el índice de Conley necesitamos los siguientes conceptos de topología.

Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$. Tenemos una relación de equivalencia que está dada por $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ o $x, y \in Y$. Entonces, tomamos las clases de equivalencia $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$, y definimos el **espacio cociente** como $X/Y = \{[x] : x \in X\}$.

El **mapeo cociente** está dado por

$$\begin{aligned} p : X &\to X/Y. \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Ejemplo 3 *Consideremos* $X = [0,1], Y = \{0\} \cup \{1\}$, *entonces* X/Y *es homeomorfo a* S^1 *(ver Figura 4).*

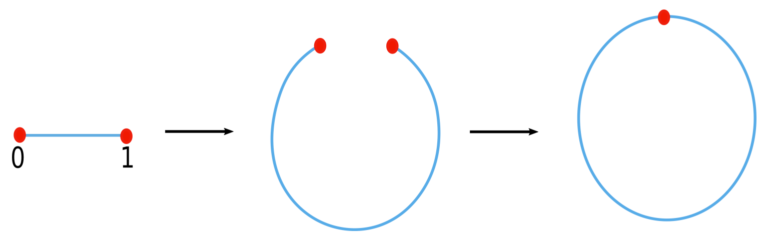

Figura 4: Espacio X/Y del ejemplo 3.

Ejemplo 4 *Ahora, consideremos a* X *como el disco cerrado y a* Y *como la frontera de este disco, es decir,* $Y = S^1, X = D^2$, *entonces* X/Y *es homeomorfo a* S^2 *(ver Figura 5).*

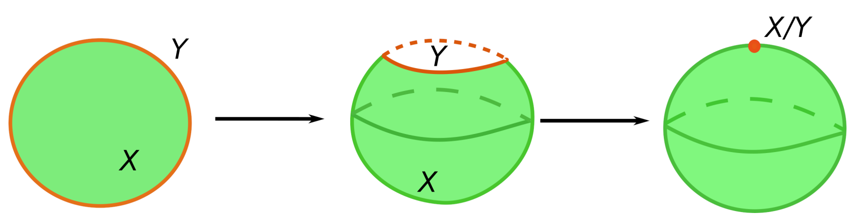

Figura 5: Espacio X/Y del ejemplo 4.

Dos espacios topológicos X_1 y X_2 son llamados **homotópicamente equivalentes**, denotado $X_1 \sim X_2$, si existen dos mapeos $f : X_1 \to X_2$ y $g : X_2 \to X_1$, tales que $f \circ g : X_2 \to X_2$ es homotópico a la función identidad Id_{X_2} y $g \circ f : X_1 \to X_1$ es homotópico a la funcion identidad Id_{X_1}.

Que dos espacios topológicos X_1 y X_2 sean homotópicamente equivalentes, puede ser interpretado como que podemos deformar uno en el otro.

Ejemplo 5 *Una bola es homotópicamente equivalente a un punto $p \in \mathbb{R}^n$. Para más detalles (ver Figura 6).*

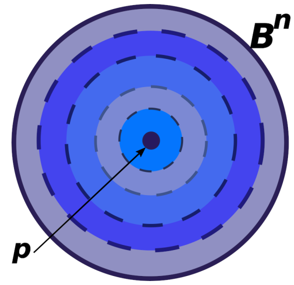

Figura 6: Ejemplo de espacios homotópicamente equivalentes.

2.3 Homología cúbica

En esta sección veremos los conceptos básicos que necesitamos para empezar a construir la homología cúbica. Iniciaremos con la definición de intervalo elemental y posteriormente definiremos nuestro principal objeto estudio, los conjuntos cúbicos, esta sección fue basada en [4].

Un **intervalo elemental** es un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$ de la forma $I = [\ell, \ell + 1]$ o $I = [\ell, \ell]$, donde $\ell \in \mathbb{Z}$. Usaremos la notación $[\ell]$ para representar a $[\ell, \ell]$.

Los intervalos de la forma $[\ell]$ se llaman intervalos singulares.

Definición 7 *Un **cubo elemental** Q es un producto finito de intervalos elementales, es decir,*

$$Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d,$$

donde cada I_k es un intervalo elemental.

Tenemos los siguientes conjuntos:

1. El conjunto de cubos elementales en $\mathbb{R}^d$ es $K^d = \{\text{Q : Q es un cubo elemental en } \mathbb{R}^d\}$.

2. El conjunto de cubos elementales es $K = \bigcup_{d=1}^{\infty} K^d$.

Si $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ es un cubo elemental, decimos que d es el **número de encaje** de Q, y escribimos $emb\ Q = d$. La **dimensión** de Q es el número de intervalos no singulares de Q, la denotaremos por dim Q. Si la dimensión de Q es k decimos que Q es un k-cubo. I_k es la k-ésima componente de Q.

Definición 8 *Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ es* ***cúbico****, si es unión finita de cubos elementales.*

Si X es cúbico, el **conjunto de cubos contenido en** X se define como $K(X) = \{Q \in K : Q \subset X\}$.

La demostración del siguiente teorema se sigue inmediatamente de las definiciones.

Proposición 1 *Si X es cúbico, entonces X es cerrado y acotado.*

2.3.1 Cadenas cúbicas

A cada k-cubo elemental $Q \in K_k^d$ le asociamos el símbolo $\hat{Q}$. El conjunto de todas las k-cadenas elementales de $\mathbb{R}^d$ es denotado por

$$\hat{K}_k^d = \{\hat{Q} | Q \in K_k^d\},$$

y el conjunto de todas las **cadenas elementales** de $\mathbb{R}^d$ está dado por

$$\widehat{K^d} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \widehat{K_k^d}.$$

Al grupo libre abeliano generado por $\widehat{K_k^d}$, denotado C_k^d, le llamamos el grupo de cadenas de $\mathbb{R}^d$ de dimensión k, y a sus elementos le llamamos k-cadenas en $\mathbb{R}^d$. Por definición, si $c \in C_k^d$, entonces $c = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{Q_i}$, donde $\alpha_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \ldots, m$.

Definición 9 *Sea $X \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cúbico. Sea $\widehat{K}_k(X) = \{\widehat{Q} | Q \in K_k(X)\}$. El conjunto de las k-cadenas de X denotado $C_k(X)$ es el subgrupo de C_k^d generado por los elementos de $\widehat{K}_k(X)$.*

Sean $c_1, c_2 \in C_k^d$, donde $c_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{Q_i}$ y $c_2 = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \widehat{Q_i}$. El **producto escalar** de las cadenas c_1 y c_2 es definido como

$$\langle c_1, c_2 \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i.$$

Dados dos cubos elementales $P \in K_k^d$ y $Q \in K_{k'}^{d'}$ definimos

$$\widehat{P} \diamond \widehat{Q} := \widehat{P \times Q}.$$

Esta definición se extiende linealmente a cadenas arbitrarias $c_1 \in C_k^d$ y $c_2 \in C_{k'}^{d'}$:

$$c_1 \diamond c_2 := \sum_{P \in K_k, Q \in K_{k'}} \langle c_1, \widehat{P} \rangle \, \langle c_2, \widehat{Q} \rangle \, \widehat{P \times Q}.$$

La cadena $c_1 \diamond c_2 \in C_{k+k'}^{d+d'}$ se llama el **producto cúbico** de c_1 y c_2.

Proposición 2 *Sea Q una cadena cúbica elemental de $\mathbb{R}^d$ con $d > 1$. Entonces existe una única cadena cúbica elemental $\widehat{I}$ y $\widehat{P}$ con $emb\ I = 1$ y $emb\ P = d - 1$ tal que*

$$\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}.$$

2.3.2 El operador frontera

Ahora definiremos un homomorfismo de grupos abelianos con el cual podremos definir homología.

Definición 10 *El **operador frontera** de un conjunto cúbico X*

$$\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X),$$

es un operador que está definido por inducción sobre el número de encaje d.

Cuando $d = 1$, Q es un intervalo de la forma $[\ell]$ o $[\ell, \ell + 1]$. Entonces se define

$$\partial_k \widehat{Q} := \begin{cases} 0, & \textit{si} \quad Q = [\ell], \\ \widehat{[\ell+1]} - \widehat{[\ell]}, & \textit{si} \quad Q = [\ell, \ell + 1]. \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $d > 1$. Sea $Q = I \times P$ tal que $dim\, I + dim\, P = dim\, Q \Rightarrow \widehat{Q} = \widehat{I \times P}$. Definimos $\partial_k(\widehat{Q}) := \partial_{k_1}(\widehat{I}) \diamond \widehat{P} + (-1)^{dim\, I} \widehat{I} \diamond \partial_{k_2} \widehat{P}$, donde $k_1 = dim\, I$ y $k_2 = dim\, P$. Extendemos esta definición para todas las cadenas por linealidad, si $c = \alpha_1 \widehat{Q_1} + \alpha_2 \widehat{Q_2} + \cdots + \alpha_m \widehat{Q_m}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, entonces $\partial_k c = \alpha_1 \partial_k \widehat{Q_1} + \alpha_2 \partial_k \widehat{Q_2} + \cdots + \alpha_m \partial_k \widehat{Q_m}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Por simplicidad, cuando no haya confusión, escribimos ∂ en vez de ∂_k.

Proposición 3 *Sean c y c' cadenas cúbicas, entonces*

$$\partial(c \diamond c') = \partial c \diamond c' + (-1)^{dim\, c} c \diamond \partial(c').$$

El siguiente resultado muestra una propiedad que cumple el operador frontera.

Proposición 4 *El resultado de componer el operador frontera consigo mismo es cero, es decir,*

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0.$$

Ahora daremos unas observaciones acerca del operador frontera. La primera observación es que dado $X \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cúbico, entonces por definición tenemos que $\partial_k(C_k(X)) \subset C_{k-1}(X)$. Otra observación es que el operador frontera para un conjunto cúbico está definido por

$$\partial_k^X : C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X),$$

que es obtenido de restringir la función $\partial_k : C_k^d \longrightarrow C_k^{d-1}$ a $C_k(X)$.

Definición 11 *El complejo de cadenas cúbico para el conjunto cúbico $X \subset \mathbb{R}^d$ es*

$$C(X) := \{C_k(X), \partial_k^X\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

donde $C_k(X)$ son los grupos de las k-cadenas cúbicas generadas por $K_k(X)$ y ∂_k^X es el operador frontera cúbico restringido a X.

2.3.3 Homología de conjuntos cúbicos

Consideremos a $X \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cúbico.

Una k-cadena $z \in C_k(X)$ es llamada un **ciclo** en X, si $\partial z = 0$. Denotaremos al conjunto de todos los k-ciclos en X por $Z_k(X)$. Es claro que $Z_k(X)$ es un subgrupo de $C_k(X)$. Lo anterior puede ser resumido como:

$$Z_k(X) := \ker \partial_k^X = C_k(X) \cap \ker \partial_k.$$

Una k-cadena $z \in C_k(X)$ es llamada una **frontera**, en X si existe $c \in C_{k+1}(X)$ tal que $\partial c = z$. El conjunto de fronteras elementales en $C_k(X)$ es la imagen de ∂_{k+1}^X y es denotado por $B_k(X)$. Además, como ∂_{k+1}^X es un homomorfismo, $B_k(X)$ es un subgrupo de $C_k(X)$. Como antes, estos comentarios pueden ser resumidos por:

$$B_k(X) := \operatorname{im} \partial_{k+1}^X = \partial_{k+1}(C_{k+1}(X)).$$

Por la proposición 4, si tenemos que $\partial c = z$, entonces $\partial z = \partial^2 c = 0$. Esto nos dice que cada frontera es un ciclo, y con esto $B_k(X)$ es subgrupo de $Z_k(X)$. A continuación, introduciremos una relación de equivalencia. Decimos que dos ciclos $z_1, z_2 \in Z_k(X)$ son **homólogos**, si $z_1 - z_2 \in B_k(X)$ y escribimos $z_1 \sim z_2$.

Definición 12 *El **k-ésimo grupo de homología cúbica** de X denotado $H_k(X)$ es el grupo cociente*

$$\frac{Z_k(X)}{B_k(X)}.$$

La homología de X es la colección de todos los grupos de homología de X y será denotada de la siguiente manera:

$$H_*(X) := \{H_k(X)\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

2.3.4 Homología relativa

En esta sección definiremos los grupos de homología relativa $H_*(X, A)$. Un par cúbico es una pareja (X, A) donde A y X son conjuntos cúbicos tales que $A \subset X$. En lo sucesivo (X, A) será un par cúbico, es decir, A y X son conjuntos cúbicos tales que $A \subset X$.

Las **cadenas relativas** de X módulo A son los elementos del cociente de grupos

$$C_k(X, A) := \frac{C_k(X)}{C_k(A)}.$$

Como en la sección anterior, los grupos $C_k(X, A)$ son grupos libres abelianos y podemos introducir los siguientes conceptos.

El **complejo de cadenas relativas** de X módulo A está dado por

$$\{C_k(X, A), \partial_k^{(X,A)}\},$$

donde el operador $\partial_k^{(X,A)}$

$$\partial_k^{(X,A)} : C_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k^{(X,A)}} C_{k-1}(X, A)$$

se define como $\partial_k^{(X,A)}([c]) = [\partial c]$. Al igual que ∂_k, este operador $\partial_k^{(X,A)}$ cumple que $\partial_{k+1}^{(X,A)} \circ \partial_k^{(X,A)} = 0$.

Definición 13 *El k-ésimo grupo de homología de X relativa a A se define como*

$$H_k(X,A) = \frac{Ker\partial_k^{(X,A)}}{Im\partial_{k+1}^{(X,A)}}.$$

Las siguientes dos proposiciones nos dan información acerca del 0-ésimo grupo de homología cúbica de pares cúbicos, de acuerdo al número de componentes conexas del conjunto cúbico X.

Proposición 5 *Sea (X,A) un par cúbico. Entonces el número de componentes conexas de X que no intersecan a A es la dimensión de $H_0(X,A)$.*

2.3.5 Sucesiones exactas

Como hemos visto en secciones anteriores, la homología inicia con un complejo de cadenas $\{C_k, \partial_k\}$, donde C_k es un grupo abeliano.

Entonces se tiene

$$\cdots \overset{\partial_{k+1}^X}{\to} C_k \overset{\partial_k^X}{\to} C_{k-1} \overset{\partial_{k-1}^X}{\to} C_{k-2} \cdots \overset{\partial_2^X}{\to} C_1 \overset{\partial_1^X}{\to} C_0 \overset{\partial^X}{\to} 0,$$

y dado que $\partial_k^X \circ \partial_{k+1}^X = 0$ se tiene que Im$\partial_{k-1}^X \subset$Ker∂_k^X.

Una clase especial de sucesiones de grupos y homomorfismo son las sucesiones exactas. Una sucesión de grupos y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \longrightarrow \cdots$$

es **exacta** en G_2, si

$$\text{im } \psi_3 = \ker \psi_2.$$

Además, decimos que la sucesión es exacta, cuando es exacta en cada grupo.

Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi_3} G_2 \xrightarrow{\psi_2} G_1 \longrightarrow 0.$$

Ejemplo 6 *Sea (X,A) un par cúbico, la sucesión*

$$0 \longrightarrow C_k(A) \xrightarrow{i_k} C_k(X) \xrightarrow{p_k} C_k(X,A) \longrightarrow 0,$$

donde i_k es la función inclusión y p_k es el mapeo cociente, es una sucesión exacta corta, $\forall k$.

El siguiente teorema es consecuencia del lema de la serpiente, que es un lema muy conocido en topología algebraica (ver [2] o [5]).

Teorema 4 ***(La sucesión exacta de la homología de un par)*** *Sea (X, A) un par cúbico. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k+1}(X) \xrightarrow{p_*} H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \longrightarrow \cdots$$

donde $i_* : C(A) \hookrightarrow C(X)$ es la función inducida por la función inclusión, $p_* : C(X) \longrightarrow C(X, A)$ es el mapeo inducido por el mapeo cociente y ∂_* es el homomorfismo de conexión.

Ejemplo 7 *Consideremos $X = [-a, a] \times [-a, a]$ y $A = ([-a, a] \times a) \cup ([-a, a] \times -a)$. Queremos calcular $H_*(X, A)$. La sucesión exacta larga para este par es*

$$\cdots \longrightarrow H_2(A) \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow H_2(X, A) \longrightarrow H_1(A) \longrightarrow H_1(X)$$

$$\longrightarrow H_1(X, A) \longrightarrow H_0(A) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

En este ejemplo $H_1(X, A) = \mathbb{Z}$, $H_0(X, A) = 0$, $H_0(A) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Más aún, por la proposición 5, tenemos que $H_0(X, A) = 0$. Así que podemos reescribir la sucesión exacta larga como

$$0 \rightarrow H_1(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

Por exactitud, $H_k(X, A) = 0$, $\forall k \geq 2$. Como i_* es sobre, $Imi_* = \mathbb{Z} = Kerp_*$ lo que implica que $p_* = 0$ y por lo tanto $Imp_* = H_0(X, A) = 0$. Por otro lado, como ∂_* es uno a uno, $Keri_* = \mathbb{Z}$. Entonces $H_1(X, A) = \mathbb{Z}$.

Como consecuencia del teorema 4, la homología relativa nos da un criterio necesario para que A sea un retracto fuerte por deformación de X.

Proposición 6 *Si (X, A) es un par cúbico y A es un retracto fuerte por deformación de X, entonces $H_*(X, A) = 0$.*

3 Principio de Ważewski

En esta sección describiremos el principio de Ważewski y se darán algunos ejemplos que lo ilustren.

Definición 14 *Dado $N \subset X$ el* ***conjunto invariante maximal*** *de N está definido por*

$$\textit{Inv}(N, \varphi) := \{x \in N : \phi_t(x) \in N, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Sea X un espacio topológico y sea $\varphi : \mathbb{R} \times X \to X$ el flujo definido en 2. Consideremos $W \subset X$. Entonces tenemos los conjuntos definidos a continuación.

Definición 15 *El conjunto de puntos en W que salen* ***eventualmente*** *es:*

$$W^0 = \{x \in W : \exists t > 0, \varphi(t, x) \notin W\}.$$

Definición 16 *El conjunto de puntos en W que salen* ***inmediatamente*** *es:*

$$W^- = \{x \in W : \textit{para todo } t > 0, \varphi([0, t), x) \nsubseteq W\}.$$

Notemos que $W^- \subset W^0 \subset W$.

Definición 17 *Un conjunto W es de* ***Ważewski*** *si se satisface lo siguiente:*

1. *Si $x \in W$ y $\varphi([0, t], x) \subset \overline{W}$ entonces $\varphi([0, t], x) \subset W$;*
2. *W^- es cerrado relativo a W^0.*

Teorema 5 *Sea W un conjunto de Ważewski. Entonces W^- es un retracto fuerte por deformación de W^0.*

Demostración. Usaremos el flujo para encontrar el retracto deseado. Definimos la función

$$\tau : W^0 \to [0, \infty),$$
$$\tau(x) := sup\{t \geq 0 | \varphi([0, t], x) \subset W\}.$$

Esta función τ es continua (esto se deduce de la continuidad del flujo y que W es Ważewski).

Además, para cada $x \in W^0$

$$\varphi(\tau(x), x) \in W^-,$$
$$\tau(x) = 0 \text{ si y sólo si } x \in W^-.$$

Por lo tanto, definimos

$$W^0 \to W^-, \;\; x \mapsto r(x) = \varphi(\tau(x), x).$$

La homotopía que se tiene de esto está dada por:

$$h : W^0 \times [0,1] \to W^0, \;\; h(x,s) = \varphi(s\tau(x), x).$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} h(x,0) &= \varphi(0\tau(x), x) = \varphi(0,x) = x = Id(x), \;\; \forall x \in W^0; \\ h(a,s) &= \varphi(s\tau(a), a) = \varphi(0,y) = a = Id(a), \;\; \forall a \in W^-, \;\; s \in I; \\ h(x,1) &= \varphi(\tau(x), x) \in W^-, x \in W^0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$i \circ r \simeq Id, \quad \text{rel}\, W^-.$$

■

Teorema 6 ***(Principio de Ważewski)*** *Si W es un conjunto de Ważewski y W^- no es un retracto fuerte por deformación de W, entonces $W \backslash W^0 \neq \varnothing$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $W \backslash W^0 = \varnothing$, entonces $W = W^0$. Por hipótesis W es de Ważewski, pero sabemos que $W^- \subset W^0 = W$. Usando el teorema 5 obtenemos una contradicción al supuesto que W^- no es un retracto fuerte por deformación. ■

En cuestión de dinámica, el siguiente resultado garantiza la existencia de soluciones contenidas en W para tiempos positivos.

Corolario 1 *Si W es un conjunto de Ważewski y W^- no es un retracto fuerte por deformación de W, entonces $Inv(W, \varphi) \neq \emptyset$.*

La siguiente proposición nos dice que existen soluciones que se mantienen en W para todo tiempo positivo.

Proposición 7 *Sea W un conjunto de Ważewski. Supongamos que W y W^- son conjuntos cúbicos. Si $H_*(W, W^-) \neq 0$, entonces $Inv(W, \varphi) \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $H_*(W, W^-) \neq 0$ por la proposición 6, se tiene que W^- no es un retracto fuerte por deformación de W y entonces haciendo uso del corolario 1 se tiene lo que se quería probar. ■

Ejemplo 8 *Considérese el sistema lineal de EDO:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Donde dada una condición inicial arbitraria (x, y), la solución asociada está dada de la siguiente manera:

$$\varphi(t, (x, y)) = \left(e^{-t}x, e^{t}y\right).$$

En este caso se tienen los siguientes conjuntos:

$$W = [-a, a] \times [-a, a], \ \ \overline{W} = W, \ \ W \setminus W^0 \neq \emptyset; \tag{3}$$

$$W^- = ([-a, a] \times \{a\}) \cup ([-a, a] \times \{-a\}); \tag{4}$$

$$W^0 = ([-a, a] \times (0, a]) \cup ([-a, a] \times [-a, 0)). \tag{5}$$

Por el ejemplo 7 se tiene que $H_1(W, W^-) = \mathbb{Z}$.
Por lo tanto, $Inv(W, \varphi) \neq \emptyset$.

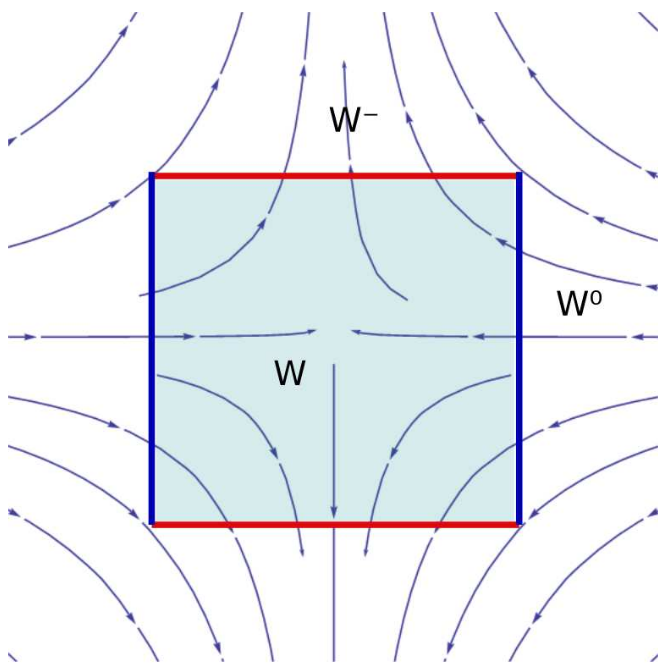

Figura 7: Conjunto de Ważewski.

4 Índice de Conley

Ahora daremos algunas definiciones que nos ayudarán a introducir el índice de Conley y para ello consideremos el sistema dinámico $\phi_t : X \times \mathbb{R} \to X$ definido sobre una una variedad diferencial X. Esta sección está basada principalmente en [1].

Definición 18 *Un conjunto compacto $N \subset X$ es una **vecindad aislante**, si*

$$Inv(N, \varphi) \subset int(N).$$

Definición 19 *Un conjunto invariante S es un **conjunto invariante aislante,** si $S = Inv(N)$ para alguna vecindad aislante N.*

Ahora definiremos el Índice de Conley asignado a S, para ello consideremos algunas definiciones.

Definición 20 *Sea S un conjunto invariante aislado. Un par de conjuntos compactos (N, L) donde $L \subset N$ es llamado un **buen par** para S si:*

1. *$S = Inv(\overline{N \backslash L})$ y $N \backslash L$ es una vecindad de S.*
2. *L es positivamente invariante en N; dado $x \in L$ y $\phi([0,t],x) \subset N$, entonces $\phi([0,t],x) \subset L$.*
3. *L es un conjunto de salida; dado $x \in N$ y $t_1 > 0$ tal que $\phi(t_1, x) \notin N$, entonces existe $t_0 \in [0, t_1]$ para el cual $\phi([0,t_0],x) \subset N$ y $\phi(t_0, x) \in L$.*

En la mayoría de los casos, la vecindad aislante N se puede tomar como la vecindad más natural (compacta) del conjunto invariante y para el subconjunto $L \subset N$ se suele considerar el conjunto de salida usual que está sobre la frontera de N (ver Figura 8).

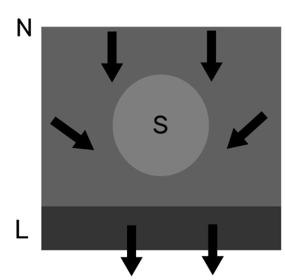

Figura 8: conjuntos N y L usuales.

El siguiente teorema nos dirá que el índice de Conley está bien definido.

Teorema 7 *Sea (N, L) y (N', L') buenos pares para un conjunto invariante aislado S. Entonces $(N/L, [L]) \sim (N'/L', [L'])$ (homotópicamente equivalentes).*

Definición 21 *El **índice de Conley** $Ind_C(S, \phi)$ de un conjunto invariante S bajo el flujo ϕ_t es el tipo de homotopía del espacio punteado $(N/L, [L])$.*

En general, trabajar con el tipo de homotopía de un espacio es complicado y por ello es mejor tomar su homología, que es lo que se conoce como la homología de Conley y que es definida como sigue:

$$CH_*(S) := H_*(N/L, [L]).$$

Ejemplo 9 *La Figura 9 muestra un ejemplo del índice de Conley. En este caso, un disco que tiene como centro un punto de equilibrio es tomado como N y el conjunto de salida L consiste de dos arcos. Si los dos arcos son identificados en un punto, obtenemos un espacio el cual es homotópicamente equivalente a un círculo. El índice de Conley en este caso donde tenemos un punto silla, es el tipo de homotopía del círculo. Por lo tanto,*

$$CH_*(S) = \mathbb{Z}.$$

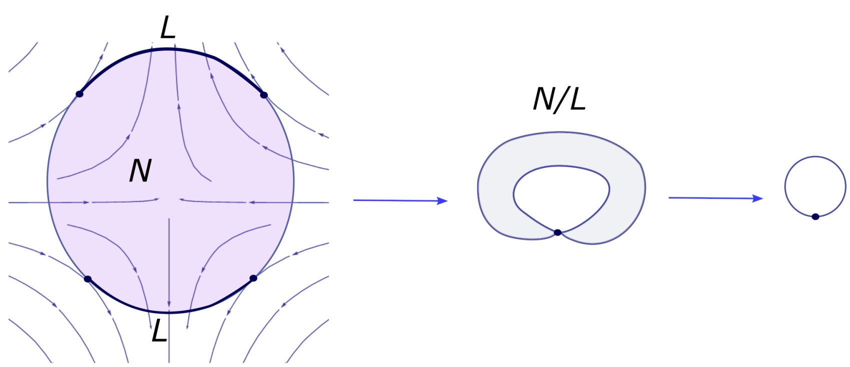

Figura 9: Índice de Conley de un punto silla.

A continuación, enunciaremos por partes el Teorema de Conley.

Consideremos una familia de sistemas dinámicos

$$\varphi_\lambda : \mathbb{R} \times X \to X$$
$$\lambda \in [-1, 1].$$

Proposición 8 *Sea N una vecindad aislante para el flujo φ_0. Entonces, para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño, N es una vecindad aislante para todo φ_λ, $|\lambda| < \delta$.*

Definición 22 *Sea $N \subset X$ un conjunto compacto. Sea $S_\lambda = Inv\ (N; \varphi_\lambda)$. Decimos que dos conjuntos invariantes aislados S_{λ_0} y S_{λ_1} están* ***relacionados por continuidad****, si N es una vecindad aislante para todo φ_λ, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.*

Teorema 8 ***(Propiedad de continuidad)*** *Sea S_{λ_0} y S_{λ_1} conjuntos invariantes aislantes que están relacionados por continuidad, entonces*

$$CH_*(S_{\lambda_0}) = CH_*(S_{\lambda_1}).$$

A continuación veremos el ejemplo más sencillo del cálculo de la homología de Conley.

Ejemplo 10 *Sea N una vecindad aislante tal que $Inv(N) = \emptyset$ y sea $S = \emptyset$. Entonces S es un conjunto invariante aislado y se tiene que*

$$CH_*(S) = CH_*(Inv(N)) = CH_*(\emptyset) = 0.$$

La contrapositiva de este ejemplo, nos da como resultado el siguiente teorema.

Teorema 9 ***(Propiedad de Ważewski)*** *Sea N una vecindad aislante y suponga que $CH_*(InvN) \neq 0$. Entonces, Inv $N \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que Inv$(N) = \emptyset$, el ejemplo anterior implica que $CH_*(S) = 0$, lo cual es una contradicción. ■

5 Aplicaciones a la dinámica continua

El siguiente ejemplo muestra un conjunto invariante aislado que son los puntos fijos hiperbólicos, a tal conjunto se le calculará la homología de Conley.

Teorema 10 *Sea S un punto fijo hiperbólico con una variedad inestable de dimensión n_u, entonces*

$$CH_k(S) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & si \quad k = n_u, \\ 0, & si \quad k \neq n_u. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria, para la cual S es un punto fijo hiperbólico

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, usando el teorema de Hartman-Grobman, tenemos que el flujo en una vecindad de S es topológicamente equivalente al flujo en una vecindad del origen de

$$\dot{y} = Df(S)y, \tag{6}$$

donde la dimensión de la variedad inestable en S es n_u y la dimensión de la variedad estable es n_s, por lo tanto $n_u + n_s = n$.

Por esta razón, es suficiente hacer el cálculo de la homología de Conley en el origen en el sistema lineal. Reescribimos el sistema (6) como

$$\begin{bmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

donde A es una matriz de $n_s \times n_s$ en la cual la parte real de todos sus eigenvalores son menores que cero y B es de $n_u \times n_u$ en la cual la parte real de los eigenvalores son más grandes que cero.

Una vecindad aislante en el origen está dada por $N = [-1,1]^{n_s} \times [-1,1]^{n_u}$ y el conjunto de salida por $L = [-1,1]^{n_s} \times \partial([-1,1]^{n_u})$.

Homotópicamente el primer factor $[-1,1]^{n_s}$ en estos productos es trivial y no juega ningún papel, por lo tanto, por contracción de L a un punto, obtenemos un espacio homotópico a la esfera de dimensión n_u.

Es decir, $H_{n_u}([-1,1]^{n_s} \times [-1,1]^{n_u}, [-1,1]^{n_s} \times \partial([-1,1]^{n_u})) = \mathbb{Z}$. ∎

Conclusiones

En este trabajo describimos cómo usar homología cúbica para garantizar la existencia de soluciones contenidas en conjuntos invariantes. Se describió también un invariante topológico llamado el índice de Conley, el cual se comporta bien bajo perturbaciones de un sistema o flujo.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores sus útiles comentarios para mejorar la redacción de este manuscrito.

Financiamiento

La autora Yesenia Zapata Gómez agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico otorgado a través de la beca número 718407 para cursar la Maestría en Ciencias Matemáticas en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Referencias

[1] A.V. Bolsinov, A.V. Borisov, I.S. Mamaev, *Bifurcation analysis and the Conley index in mechanics*, Regular and Chaotic Dynamics **17**(2012), no. 5, 451–478. Doi: 10.1134/S1560354712050073

[2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cornell University, Ithaca NY and Cambridge University Press, Cambridge UK, ISBN: 9780521795401, 2002. https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf

[3] M.W. Hirsch, R.L. Devaney, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, 2nd Ed., Pure and Applied Mathematics Series, Academic Press, San Diego, 2003.

[4] T. Kaczynski, K. Mischaikow, M. Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences, Springer, New York NY, 2004. Doi: 10.1007/b97315

[5] W.S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York NY, 1991. Doi: 10.1007/978-1-4939-9063-4

[6] K. Mischaikow, M. Mrozek, *Conley index*, in: B. Fiedler (Ed.) Handbook of Dynamical Systems, Vol. 2, Elsevier Science, 2002, pp. 393–460. Doi: 10.1016/S1874-575X(02)80030-3

[7] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York NY, 2008. Doi: 10.1007/978-1-4613-0003-8