Pensamiento Actual. Universidad de Costa Rica.
Volumen 11 - No. 16-17, 2011 ◆ ISSN 2215-3586 ◆ 65 - 80

Construcción de una 2-forma diferencial para las órbitas coadjuntas de los grupos $M(1)$, $SO(3,\mathbb{R})$ y $\mathbb{H}_3$

Héctor Mauricio Barrantes González[1] y Norman F. Noguera Salgado[2]
Recibido: 5 de mayo de 2012 / Aprobado: 27 de setiembre de 2012

Resumen

En este artículo se presenta la construcción de una 2-forma diferencial para las órbitas coadjuntas del grupo afín M(1), el Grupo Ortogonal Especial SO(3,R) y el Grupo de Heisemberg H3. Se parte del hecho de que el lector conoce algunos conceptos como variedad diferencial, forma diferencial, grupo de Lie, álgebra de Lie y acción coadjunta. No obstante, se reseña brevemente cada uno de estos conceptos.

Palabras clave: Variedad Simpléctica; forma diferencial; grupo de lie; álgebra de lie; grupo afín; grupo ortogonal especial, grupo de Heisenberg, órbita coadjunta

Abstract

This paper presents the construction of a 2-differential form for the coadjoint orbits of the affine group M (1), the Special Orthogonal Group SO (3, R) and the Heisenberg group H3. We assume that the reader knows concepts such as differentiable manifold, differential forms, Lie group, Lie algebra and coadjoint action. However, we briefly review each of these concepts.

Key Words: Simplectic Manifold; Differential form; Lie Group; Lie Algebra; affine group; Special Orthogonal Group; Heisenberg group; Coadjoint Orbit.

1. Introducción

Las variedades simplécticas son una herramienta matemática importante en física. Dos de las aplicaciones de las variedades simplécticas en esta rama son, por ejemplo, la descripción de la mecánica clásica de un sistema físico dado y el proceso de cuantización. Es decir, describir un sistema físico de forma cuántica a partir de su descripción clásica.

Es por esta razón que dichas variedades son comúnmente utilizadas en las investigaciones de la

[1]Docente de la Sección de Matemática, Departamento de Ciencias Naturales, Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente.
*Actualmente realiza estudios de posgrado en el Centro de Investigación en Matemática (CIMAT), Guanajuato, México.
hector.barrantes@ucr.ac.cr
[2]Profesor en la carrera de Enseñanza de la Matemática. Departamento de Ciencias Naturales, Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente. norman.noguera@ucr.ac.cr

física teórica. Como veremos más adelante, una variedad simpléctica es una variedad de dimensión par junto con una 2-forma diferencial ω cerrada y no degenerada. Es posible obtener ejemplos de variedades simplécticas a partir de lasórbitas coadjuntas de un punto del dual álgebra de Lie. Las siguientes páginas proporcionan los cálculos de la 2-forma diferencial de algunas órbitas coadjuntas, dotando así a dichos conjuntos de una estructura de variedad simpléctica. Es importante recalcar que tales cálculos se llevan a cabo de forma explícita y detallada, mediante la utilización de herramientas básicas del álgebra lineal y el cálculo diferencial.

2. Preliminares

Antes de dar inicio con los cálculos, se lleva a cabo un breve recorrido por algunos conceptos que se utilizan a lo largo del artículo.

La primera definición que se muestra es la de variedad diferencial, puesto que como mencionamos anteriormente lo que se buscan son ejemplos de variedades simplécticas. Una variedad diferencial M es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable, que posee una clase de equivalencia de atlas compatibles.

La estructura que proporciona la característica de ser una variedad simpléctica a una variedad diferencial es una 2-forma diferencial. Una k-forma diferencial sobre una variedad diferenciable M es una función

$$\omega\colon \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{k \text{ veces}} \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

que es $C^{\infty}(M)$ k-lineal y alternante.

Uniendo los conceptos presentados anteriormente podemos definir una variedad simpléctica como una variedad diferencial de dimensión par. Además, dicha variedad debe estar acompañada de una 2-forma ω diferencial cerrada y no degenerada. Escribimos (M,ω) para denotar la variedad simpléctica.

Ahora introduciremos algunos conceptos que permiten definir ejemplos de variedades simplécticas.

Un grupo de Lie G, es un grupo que es a la vez una variedad diferencial, en donde la operación $F(g,h)=g\cdot h$, definida a partir del producto de grupo, y la operación inversión $i(g)=g^{-1}$ son funciones suaves.

El siguiente concepto que ocuparemos es el de álgebra de Lie. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial dotado de otra operación, diferente de las dos operaciones de espacio vectorial, y de un corchete $[\cdot,\cdot]$ sobre $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ que satisface las propiedades de bilinealidad, antisimetría y la identidad de Jacobi.

Otro concepto que necesitaremos para obtener ejemplos de variedades simplécticas es el de acción de un grupo sobre una variedad. Partimos de un grupo de Lie G y de una variedad diferencial M. Una acción de G sobre M, es una aplicación suave:

$$\begin{array}{rcl}\theta : G\times M & \to & M\\ \theta(g,p) & = & g\cdot p,\end{array}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. Si e es el elemento neutro de G y $p\in M$, entonces $\theta(e,p)=p$.
2. Si $g_1,g_2\in G$ y $p\in M$, entonces $\theta(g_1,\theta(g_2,p))=\theta(g_1g_2,p)$.

Un ejemplo importante de acción de un grupo sobre una variedad es la acción coadjunta. Ésta es una acción de un grupo de Lie sobre el dual de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}^*$, que también es un espacio vectorial. Dicha acción está dada por:

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{CoAd}\colon G\times\mathfrak{g}^* & \to & \mathfrak{g}^*\\ \mathrm{CoAd}(g,f) & = & f\circ\mathrm{Ad}(g^{-1}).\end{array}$$

Un subconjunto de M, que se obtiene de la acción θ, es la órbita de un punto $p\in M$, denotada $\mathcal{O}_p$,

$$\mathcal{O}_p=\{g\cdot p|\ \ g\in G\}=\{q\in M\mid \exists\, g\in G,\ q=g\cdot p\}.$$

De particular interés es la órbita de la acción coadjunta llamada *Órbita Coadjunta*, puesto que dichos conjuntos son variedades simplécticas, hecho que se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.
Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Considere la acción coadjunta de G sobre $\mathfrak{g}^*$

$$\begin{array}{rcl}\mathit{CoAd}\colon G\times\mathfrak{g}^* & \to & \mathfrak{g}^*\\ \mathit{CoAd}(g,f) & = & f\circ \mathit{Ad}(g^{-1})\end{array}$$

Si $f\in\mathfrak{g}^*$ entonces la órbita coadjunta de f

$$\mathcal{O}_f=\{\mathit{CoAd}(g,f)|\ \ \ g\in G\}$$

es una variedad simpléctica.

La prueba de este teorema, véase [6] o [4], proporciona la manera en cómo se define la 2-forma diferencial correspondiente a las órbitas coanjuntas de un punto del dual álgebra de Lie. El objetivo de este artículo es mostrar la construcción de la 2-forma diferencial para algunos ejemplos de órbitas coadjuntas.

3. Cálculo de la 2-forma de una órbita coadjunta

3.1. 2-forma diferencial del Grupo Afín $M(1)$

Consideremos el conjunto:

$$M(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$$

con la operación:

$$\begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 a^2 & a^1 b^2 + b^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

G con esta operación es un grupo de Lie llamado **grupo afín**[1]
Su álgebra de Lie está dada por:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{R} \right\},$$

con el corchete definido por:

$$[\cdot,\cdot] \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

$$[X, Y] = XY - YX.$$

La órbita coadjunta correspondiente a un punto $q = (x, y) \in \mathfrak{g}^*, y > 0$ es:

$$\mathcal{O}_q^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

La órbita coadjunta correspondiente a un punto $q = (x, y) \in \mathfrak{g}^*, y < 0$ es:

$$\mathcal{O}_q^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$$

La órbita coadjunta correspondiente a un punto $q = (x, 0) \in \mathfrak{g}^*, y < 0$ es $(x, 0)$, es decir, los puntos de la forma $(x, 0)$ son invariantes bajo la acción coadjunta (Véase [1]).
Determinaremos cómo actúa un funcional $f \in \mathfrak{g}^*$ sobre los elementos de $\mathfrak{g}$.
Una base para el álgebra de Lie es:

[1] Como es usual en geometría diferencial, usamos notación de superíndices para denotar las coordenadas locales de una variedad, que en este caso corresponden a las entradas de los elementos de $M(1)$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es decir, si $X \in \mathfrak{g}$, $X = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, podemos escribir

$$X = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para la base B existe una base dual de $\mathfrak{g}^*$, $B' = \{f_1, f_2\}$, tal que [2]

$$f_1 \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = m \quad y \quad f_2 \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = n.$$

En este caso si $f \in \mathfrak{g}^*$, es decir $f \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal, podemos escribir:

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2,$$

donde las constantes c_1, c_2 satisfacen $c_1 = f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $c_2 = f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. De lo anterior se tiene que:

$$f = f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot f_1 + f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot f_2$$

Así, si $X = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$, f actúa sobre X como sigue:

$$f \left[\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = c_1 m + c_2 n.$$

Usando el conjunto $\{1\}$ como una base para $\mathbb{R}$, se obtiene que la matriz que representa al funcional $f \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Observe que ésto último define un isomorfismo entre $\mathfrak{g}^*$ y $\mathbb{R}^2$.

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ actúa sobre su dual $\mathfrak{g}^*$ por medio de la acción:

$$\theta \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$$

$$\theta(X, f) = X \cdot f = -f \circ \mathrm{ad}X$$

[2] Esta condición se debe a la definición de base dual. Una descripción sobre bases duales puede encontrarla en [5].

donde $X, Y \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^*$ y la aplicación ad$X$ es la transformación lineal

$$\mathrm{ad}X \cdot Y = [X, Y].$$

Vamos a calcular la matriz de la transformación lineal: ad$X$ en la base B:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego, la matriz de la transformación ad$X$ está dada por:

$$\mathrm{ad}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -n & m \end{pmatrix}.$$

Suponga que la matriz de $f \in \mathfrak{g}^*$ es: $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$, la acción $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}^*$ se expresa:

$$\begin{aligned}
\theta \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\
\theta(X, f) &= X \cdot f = -f \circ \mathrm{ad}X
\end{aligned}$$

Así, la matriz que representa al funcional $-f \circ \mathrm{ad}X$ está dado por:

$$\begin{aligned}
X \cdot f &= -f \circ \mathrm{ad}X \ \in \mathfrak{g}^* \\
&= -\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -n & m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} yn & -ym \end{pmatrix}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Observe que si $p \in \mathcal{O}_q \subset \mathfrak{g}^*$ podemos asociarle la matriz: $\begin{pmatrix} p^1 & p^2 \end{pmatrix}$.
Al calcular el espacio tangente de $\mathcal{O}_q$ en el punto p tenemos:

$$T_p(\mathcal{O}_q) = \mathcal{O}_{\mathbf{p}} = \{X \cdot p \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Así, si v, u son vectores en $T_p(\mathcal{O}_q)$, podemos escribir $v = V \cdot p$ y $u = U \cdot p$, donde $U, V \in \mathfrak{g}$ con

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la 2-forma que proporciona la estructura simpléctica de la órbita coadjunta $\mathcal{O}_q$ está definida por:

$$\omega(p)(u, v) = p\,[U, V].$$

Vamos a calcular la expresión local de ω en las coordenadas locales (x^1, x^2) de la variedad diferencial $\mathcal{O}_q$.
Suponga que $u, v \in T_p(\mathcal{O}_q)$. Observe que por la definición de los vectores u y v, al ser funcionales y de acuerdo con la ecuación (1) les corresponden las matrices:

$$\begin{pmatrix} p^2u_2 & -p^2u_1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} p^2v_2 & -p^2v_1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Puesto que, una base para $T_p(\mathcal{O}_q)$ está dada por:

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p \right\},$$

tomamos:

$$v = a^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p = (a^1, b^1) = (p^2u_2, -p^2u_1) \tag{2}$$

$$v = a^2 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^2 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p = (a^2, b^2) = (p^2v_2, -p^2v_1). \tag{3}$$

En este caso utilizamos la identificación de los funcionales u y v con elementos de $\mathbb{R}^2$.
De (2) y (3) se tienen las siguientes relaciones:

$$u_2 = \frac{a^1}{p^2}; \quad u_1 = \frac{-b^1}{p^2}, \quad v_2 = \frac{a^2}{p^2}, \quad v_1 = \frac{-b^2}{p^2}.$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\omega(p)(u,v) &= p\left([U,V]\right) \\
&= p\left(\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= p\left(\begin{pmatrix} 0 & u_1v_2 - u_2v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= p^2(u_1v_2 - u_2v_1), \qquad p \text{ actúa sobre elementos de } \mathfrak{g}. \\
&= p^2\left(\frac{-b^1}{p^2}\cdot\frac{a^2}{p^2} - \frac{a^1}{p^2}\cdot\frac{-b^2}{p^2}\right) \\
&= \frac{1}{p^2}(a^1b^2 - a^2b^1) \\
&= \frac{1}{p^2}\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} dx^1\left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + b^1\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p\right) & dx^2|_p\left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + b^1\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p\right) \\ dx^1|_p\left(a^2\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + b^2\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p\right) & dx^2|_p\left(a^2\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + b^2\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p\right) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{p^2}\begin{vmatrix} dx^1|_p(u) & dx^2|_p(u) \\ dx^1|_p(v) & dx^2|_p(v) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{p^2}dx^1|_p \wedge dx^2|_p\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la forma local de ω está dada por:

$$\omega = \frac{1}{x^2}dx^1 \wedge dx^2.$$

3.2. 2-forma diferencial del Grupo Especial Ortogonal $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(\mathbf{3}, \mathbb{R})$

El conjunto de matrices 3×3:

$$SO(3) = \{A \in Gl(3,\mathbb{R}) \mid A^tA = I_3; \det A = 1\},$$

es un grupo de Lie junto con la multiplicación usual de matrices. Este grupo es llamado **Grupo Ortogonal Especial Real**. Su álgebra de Lie está dada por:

$$\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}.$$

Las órbitas coadjuntas de un punto $q \in (\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}))^* \cong \mathbb{R}^3$ son esferas:

$$\mathcal{O}_q = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = r\}.$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ actúa sobre su dual $(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}))^*$ por medio de la acción:

$$\begin{aligned} \theta\colon \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \times (\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}))^* &\longrightarrow (\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}))^* \\ \theta(X,f) &= X \cdot f = -f \circ \mathrm{ad}X \end{aligned}$$

donde $\mathrm{ad}X(Y) = [X,Y]$.

De lo anterior se tiene que la 2-forma ω en un punto p de la órbita coadjunta $\mathcal{O}_q$ está dada por:

$$\omega(p)(U \cdot p, V \cdot p) = p([U,V]),$$

donde U y V son campos vectoriales en $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.

Ahora determinaremos la expresión local de la 2-forma ω para una carta local (U,ϕ) de la órbita $\mathcal{O}_q$.

El espacio tangente a $\mathcal{O}_q$ en $p \in \mathcal{O}_q$ está dado por:

$$T_p(\mathcal{O}_q) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid p \cdot v = 0\}.$$

Sean $u, v \in T_p(\mathcal{O}_f)$, entonces:

$$u = U \cdot p = -p \circ \mathrm{ad}U$$

$$v = V \cdot p = -p \circ \mathrm{ad}V$$

donde $U, V \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$.

Escribimos U y V en términos de sus componentes:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo muestra que si $X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, entonces la matriz de la transformación lineal:

$$\mathrm{ad}X\colon \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \to \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$$

$$\mathrm{ad}X(Y) = [X,Y]$$

en la base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ está dada por:

$$\mathrm{ad}X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$\mathrm{ad}U = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}V = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que la órbita coadjunta está contenida en el espacio dual del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Entonces el punto p es un funcional lineal, $p\colon \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\begin{pmatrix} p^1 & p^2 & p^3 \end{pmatrix}$ es la matriz que representa al funcional $p \in \mathcal{O}_q \subset (\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}))^*$, podemos encontrar las matrices que representan a los funcionales $-p \circ \mathrm{ad}U$ y $-p \circ \mathrm{ad}V$. Así,

$$u = -p \circ \mathrm{ad}U = -\begin{pmatrix} p^1 & p^2 & p^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^3u_2 - p^2u_3 \\ p^1u_3 - p^3u_1 \\ p^2u_1 - p^1u_2 \end{pmatrix}$$

de igual forma:

$$v = -p \circ \mathrm{ad}V = -\begin{pmatrix} p^1 & p^2 & p^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^3v_2 - p^2v_3 \\ p^1v_3 - p^3v_1 \\ p^2v_1 - p^1v_2 \end{pmatrix}.$$

Como $u \in T_p(\mathcal{O}_q)$ entonces u se puede escribir en la forma:

$$u = (p^1u_3 - p^3u_1)\left(\frac{-p^2}{p^1}, 1, 0\right) + (p^2u_1 - p^1u_2)\left(\frac{-p^3}{p^1}, 0, 1\right),$$

pues:

$$\left\{\left(\frac{-p^2}{p^1}, 1, 0\right), \left(\frac{-p^3}{p^1}, 0, 1\right)\right\},$$

es una base del plano tangente a la esfera $\mathcal{O}_q$ en el punto p.
Similarmente:

$$v = (p^1v_3 - p^3v_1)\left(\frac{-p^2}{p^1}, 1, 0\right) + (p^2v_1 - p^1v_2)\left(\frac{-p^3}{p^1}, 0, 1\right)$$

Consideremos la carta local (U,ϕ) de $\mathcal{O}_f$, donde $U = \{(s^1,s^2,s^3) \in \mathcal{O}_q |\ s^1 > 0\}$ y

$$\begin{aligned} \phi\colon U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \phi(s^1,s^2,s^3) &= (s^2,s^3). \end{aligned}$$

Sean (x^1,x^2) las coordenadas locales de $\mathcal{O}_q$, entonces:

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p \right\}$$

es una base de $T_p(\mathcal{O}_q)$. Si (a^1, b^1) y (a^2, b^2) son las coordenadas de u y v se tiene:

$$u = a^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p \quad , \qquad v = a^2 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^2 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p$$

pero:

$$u = (a^1, b^1) = (p^1 u_3 - p^3 u_1, p^2 u_1 - p^1 u_2)$$
$$v = (a^2, b^2) = (p^1 v_3 - p^3 v_1, p^2 v_1 - p^1 v_2)$$

de donde:

$$\begin{cases} a^1 &= p^1 u_3 - p^3 u_1 \\ b^1 &= p^2 u_1 - p^1 u_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 &= p^1 v_3 - p^3 v_1 \\ b^2 &= p^2 v_1 - p^1 v_2 \end{cases}.$$

Evaluemos ahora la 2-forma ω en los vectores u, v:

$$\omega(p)(u,v) = p([U,V]) = p(UV - VU) = p\left\{ \begin{pmatrix} 0 & u_2 v_1 - v_2 u_1 & u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 & 0 & u_3 v_2 - v_3 u_2 \\ v_3 u_1 - u_3 v_1 & v_3 u_2 - u_3 v_2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (4)$$

Como p es un funcional en $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})^*$, si $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})^*$ tal que

$$f_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad f_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad f_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

y definimos los valores de p sobre la base B de la forma:

$$p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = p_1, \qquad p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = p_2, \qquad p \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = p_3$$

entonces p se puede escribir como combinación lineal de la base dual de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, luego se tiene:

$$p = p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} f_1 + p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} f_2 + p \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f_3.$$

Si $X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ entonces p actúa sobre los elementos de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ de la siguiente forma:

$$p(X) = p^1 a + p^2 b + p^3 c$$

y de acuerdo con las ecuaciones de (4) se tiene:

$$\begin{aligned}
p(X) &= p^1 a + p^2 b + p^3 c \\
&= p^1(v_3u_2 - u_3v_2) + p^2(u_3v_1 - v_3u_1) + p^3(u_1v_2 - v_1u_2) \\
&= p^1v_3u_2 - p^1u_3v_2 + p^2u_3v_1 - p^2v_3u_1 + p^3u_1v_2 - p^3v_1u_2 \\
&= p^2u_3v_1 - p^1u_3v_2 + p^3u_1v_2 - p^2u_1v_3 + p^1v_3u_2 - p^3v_1u_2 \\
&= \frac{p^1}{p^1}p^2u_3v_1 - \frac{p^1}{p^1}p^1u_3v_2 - \frac{p^3p^2}{p^1}u_1v_1 + \frac{p^1}{p^1}p^3u_1v_2 \\
&\quad - \left(\frac{p^1}{p^1}p^2u_1v_3 - \frac{p^1}{p^1}p^1v_3u_2 - \frac{p^3p^2}{p^1}u_1v_1 + \frac{p^1}{p^1}p^3v_1u_2\right) \\
&= \frac{1}{p^1}(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= \frac{1}{p^1}\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} dx^1|_p\left(a^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + b^1 \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p\right) & dx^2|_p\left(a^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + b^1 \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p\right) \\ dx^1|_p\left(a^2 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + b^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p\right) & dx^2|_p\left(a^2 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + b^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p\right) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{p^1}\begin{vmatrix} dx^1|_p(u) & dx^2|_p(u) \\ dx^1|_p(v) & dx^2|_p(v) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{p^1}dx^1|_p \wedge dx^2|_p(u,v).
\end{aligned}$$

Si (q^1, q^2) son las coordenadas locales correspondientes al punto $p = (p^1, p^2, p^3) \in \mathcal{O}_f$ se tiene que $p^1 = \sqrt{r^2 - (q^1)^2 - (q^2)^2}$. De donde la expresión local de la forma ω está dada por:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{r^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}}dx^1 \wedge dx^2.$$

2-Forma diferencial del grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$

Considere el Grupo de Heisenberg de dimensión 3:

$$\mathbb{H}_3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

con el producto:

$$(a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + \frac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1))$$

$\mathbb{H}_3$ con este producto es un grupo de Lie. El álgebra de Lie de este grupo es $h_3 = \mathbb{R}^3$ con el producto cruz usual. El dual del álgebra de Lie está dada por: $h_3^* = \mathbb{R}^3$.
Las órbitas correspondientes a los puntos de la forma $(x, y, 0)$ en h_3^* son puntos de la misma forma. La órbita coadjunta de un punto $q = (x, y, z) \in h_3^*$ es un plano cuya ecuación es $z = z_0$, donde z_0 es fijo (Veáse [1]). Es decir:

$$\mathcal{O}_q = \{(x, y, z) \mid z = z_0\}.$$

El álgebra de Lie $h_3 = \mathbb{R}^3$ actúa sobre su dual por medio de la acción:

$$\theta\colon h_3 \times h_3^* \to h_3^*$$
$$\theta(X, f) = X \cdot f = -f \circ \mathrm{ad}X$$

donde:

$$\mathrm{ad}X\colon h_3 \to h_3$$
$$(\mathrm{ad}X)Y = [X, Y] = X \times Y.$$

Primero calculamos la matriz de adX en la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, donde:

$$e_1 = (1, 0, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0)$$
$$e_3 = (0, 0, 1).$$

Tenemos que:

$$(\mathrm{ad}X)e_1 = (0, z, -y)$$
$$(\mathrm{ad}X)e_2 = (-z, 0, x)$$
$$(\mathrm{ad}X)e_3 = (y, -x, 0)$$

por lo tanto la matriz de $\mathrm{ad}X$ está dada por:

$$\mathrm{ad}X = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora $\theta(X, f)$. Sea $f = (a, b, c)$ y $X = (x, y, z)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \theta(X, f) &= X \cdot f \\ &= -f \circ \mathrm{ad}X \\ &= -(a, b, c) \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \\ &= -(bz - cy, cx - az, ay - bx) \\ &= (cy - bz, az - cx, bx - ay). \end{aligned}$$

Sea $p=(p^1,p^2,z_0)$ un punto en la órbita $\mathcal{O}_q$. Sean $u,v\in T_p(\mathcal{O}_q)$, entonces $u=U\cdot p$ y $v=V\cdot p$, donde $U=(u_1,u_2,u_3), V=(v_1,v_2,v_3)$.

Es decir:

$$\begin{aligned} u &= U\cdot p = -p\circ \mathrm{ad}U = (u_2z_0 - p^2u_3, u_3p^1 - z_0u_1, p^2u_1 - p^1u_2)\\ v &= V\cdot p = -p\circ \mathrm{ad}V = (v_2z_0 - p^2v_3, v_3p^1 - z_0v_1, p^2v_1 - p^1v_2). \end{aligned}$$

Recordemos que $\mathcal{O}_q$ es una variedad diferencial. En este caso es de dimensión 2, puesto que es un plano en $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, $T_p(\mathcal{O}_q)$ es un espacio vectorial de dimensión 2.

Sean (x^1,x^2) las coordenadas locales de $\mathcal{O}_q$. Entonces el conjunto

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p \right\}$$

es una base de $T_p(\mathcal{O}_q)$.

Dado que $u,v\in T_p(\mathcal{O}_q)$ entonces se tiene:

$$u = a^1\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^1\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p = (a^1,b^1)$$

análogamente:

$$v = a^2\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^2\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p = (a^2,b^2)$$

Hacemos la identificación:

$$\begin{cases} a^1 = u_2z_0 - p^2u_3\\ b^1 = v_2z_0 - p^2v_3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a^2 = u_3p^1 - z_0u_1\\ b^2 = v_3p^1 - z_0v_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} p^2u_1 - p^1u_2 = 0\\ p^2v_1 - p^1v_2 = 0 \end{cases}.$$

Calculamos ahora la 2-forma diferencial $\omega(p)(u,v)$ correspondiente a la órbita coadjunta $\mathcal{O}_q$

$$\begin{aligned} \omega(p)(u,v) &= p[U,V]\\ &= p\cdot(U\times V)\\ &= (p^1,p^2,z_0)\cdot(u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1)\\ &= p^1(u_2v_3-u_3v_2)+p^2(u_3v_1-u_1v_3)+z_0(u_1v_2-u_2v_1)\\ &= \frac{1}{z_0}(a^1b^2-a^2b^1)\\ &= \frac{1}{z_0}\begin{vmatrix} a^1 & b^1\\ a^2 & b^2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} dx^1|_p\left(a^1\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^1\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p\right) & dx^2|_p\left(a^1\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^1\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p\right)\\ dx^1|_p\left(a^2\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^2\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p\right) & dx^2|_p\left(a^2\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + b^2\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p\right) \end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{z_0}dx^1|_p\wedge dx^2|_p(u,v). \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que la 2-forma diferencial ω de la órbita coadjunta $\mathcal{O}_q$ está dada por

$$\omega = \frac{1}{z_0} dx^1 \wedge dx^2.$$

4. Conclusión

A continuación resumimos los resultados obtenidos de los cálculos de la expresión local de la 2-forma diferencial correspondiente a las órbitas coadjuntas de los grupos de Lie $M(1)$, $SO(3,\mathbb{R})$ y $\mathbb{H}_3$.

Grupo de Lie	Órbita Coadjunta	2-Forma Diferencial
$M(1)$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$	$\omega = \frac{1}{x^2} dx^1 \wedge dx^2.$
$SO(3,\mathbb{R})$	$\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = r\}$	$\omega = \frac{1}{\sqrt{r^2-(x^1)^2-(x^2)^2}} dx^1 \wedge dx^2$
$\mathbb{H}_3$	$\mathcal{O}_q = \{(x,y,z) \mid z = z_0\}$	$\omega = \frac{1}{z_0} dx^1 \wedge dx^2.$

Referencias

[1] Ávila, Juan F. H. (1990). *Grupos de Lie y Orbitas Coadjuntas Cuantizables*. Tesis para optar al grado de Licenciatura. Universidad de Costa Rica. Ciudad Universitaria Rodrigo Facio.

[2] Bombal, Fernando (1999). La ciencia en el siglo XX: Seminario "Oratova"de Historia de la Ciencia, p. 115-146. *Consejería de Educación del Gobierno de Canarias* Enero.

[3] De Guzmán, Miguel (2003). Matemáticas y Sociedad. Acortando distancias. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 34, 11-19.

[4] Barrantes Héctor, Noguera Norman. (2009). *Aplicaciones Básidas de las variedades simplécticas en física*, Tesis de Licenciatura, Costa Rica. Universidad de Costa Rica.

[5] Hoffman, Kenneth (1971). *Álgebra Lineal*. México: Editorial Prentice-Hall.

[6] Kirillov, A. A. (1976). *Elements of the Theory of Representation*. New York: Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.

[7] Isham, Chris J. (1997). *Lectures on Quantum Theory: Mathematical and Structural Foundations*. London: Imperial College Press. S. A.

[8] Wallach, N.R. (1977). *Symplectic Geometry and fourier analysis*. Math.Sci. Press, Brookline.